Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

30.6.1998, Lösungen zu dem Übungsblatt Nr. 9

Aufgabe 1) a.) Als magnetisches Blatt kann jede beliebige Fläche gewählt werden, die vom Leiter berandet wird. Hier soll die Ebene innerhalb des Kreisringes benutzt werden.
Für das skalare magnetische Potential $\psi = \frac{I}{4\pi}\int \frac{\vec{n}\cdot\vec{r}}{r^3}\,df'$ erhält man auf der Achse

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{z}{\sqrt{\rho'^2+z^2}^3}\rho'\,d\rho' d\phi' \\ &= \frac{I}{2}\left(\frac{z}{|z|}-\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}}\right).\end{aligned}$$

Damit lautet das Magnetfeld auf der Achse $\vec{H} = -\mathrm{grad}\psi = \frac{I}{2}\frac{a^2}{\sqrt{a^2+z^2}^3}\vec{e}_z$.
Für einen weit entfernten Punkt bleibt $r = \sqrt{\rho^2+z^2}$ während der Integration konstant,

$$\begin{aligned}\psi &= \frac{I}{4\pi}\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}^3}\int \rho'\,d\phi' d\rho' = \frac{Ia^2}{4}\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}^3}\,, \\ \vec{H} &= \frac{Ia^2}{4}\left[\frac{2z^2-\rho^2}{\sqrt{z^2+\rho^2}^5}\vec{e}_z + \frac{3\rho z}{\sqrt{z^2+\rho^2}^5}\vec{e}_\rho\right].\end{aligned}$$

b.) Das Biot-Savartsche Gesetz liefert

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{e}_{\phi'}\times\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}a\,d\phi'\,.$$

Als konstante Einheitsvektoren bei der Integration über ϕ' werden die Zylinerkoordinaten bezüglich des Aufpunktes $\vec{r}$ genommen. Somit gilt

$$\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho + z\vec{e}_z\,, \vec{r}' = a\cos\phi'\vec{e}_\rho + a\sin\phi'\vec{e}_\phi\,, \vec{e}_{\phi'} = -\sin\phi'\vec{e}_\rho + \cos\phi'\vec{e}_\phi\,.$$

Das Biot-Savartsche Gesetz ergibt für diese Wahl

$$\vec{H} = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\vec{e}_\rho z\cos\phi' + \vec{e}_\phi z\sin\phi' + \vec{e}_z\left(a-\rho\cos\phi'\right)}{\left(\rho^2+z^2+a^2-2a\rho\cos\phi'\right)^{\frac{3}{2}}}a\,d\phi'\,.$$

Auf der Achse $\rho = 0$ ergibt die Integration $\vec{H} = \frac{I}{2}\frac{a^2}{(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z$. Für einen weit entfernten Punkt entwickelt man die Wurzel für $\rho, z \gg a$

$$
\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}} \left(1 + \frac{3}{2}\frac{2a\rho}{z^2+\rho^2}\cos\phi' + \ldots\right) \\
&\quad (\vec{e}_\rho z\cos\phi' + \vec{e}_\phi z \sin\phi' + \vec{e}_z\,(a - \rho\cos\phi'))\, a\, d\phi \\
&= \frac{Ia^2}{4}\left(\frac{2z^2-\rho^2}{(z^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}}\vec{e}_z + \frac{3\rho z}{(z^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}}\vec{e}_\rho\right) .
\end{aligned}
$$

c.) Das Vektorpotential für den Drahtring lautet

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}\,dV}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{-\vec{e}_\rho \sin\phi' + \vec{e}_\phi\cos\phi'}{(z^2+\rho^2+a^2-2a\rho\cos\phi')^{\frac{1}{2}}} a d\phi' .
\end{aligned}
$$

Für einen Punkt in der Umgebung der Achse entwickelt man

$$
\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{(z^2+a^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{a\rho}{z^2+a^2}\cos\phi' + \ldots\right)
$$

und erhält $\vec{A} = \frac{\mu_0 I a^2}{4(z^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\rho\vec{e}_\phi$. Daraus resultiert mit

$$
\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\vec{A} = \frac{1}{\mu_0}\left((\frac{1}{\rho}\partial_\phi A_z - \partial_z A_\phi)\vec{e}_\rho + (\partial_z A_\rho - \partial_\rho A_z)\vec{e}_\phi + \frac{1}{\rho}(\partial_\rho(\rho A_\phi) - \partial_\phi A_\rho)\vec{e}_z\right)
$$

das Magnetfeld zu

$$
\vec{H} = \frac{3}{4}\frac{Ia^2\rho z}{(a^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}\vec{e}_\rho + \frac{Ia^2}{2\,(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_z .
$$

Auf der Achse bestätigt man das alte Ergebnis. Für einen weit entfernten Punkt folgt mit $z, \rho \gg a$ und somit $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{(z^2+\rho^2)^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{a\rho}{z^2+\rho^2}\cos\phi' + \ldots\right)$

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\,(z^2+\rho^2)^{\frac{3}{2}}}\rho\vec{e}_\phi , \\
\vec{H} &= \frac{3}{4}\frac{Ia^2\rho z}{(z^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}}\vec{e}_\rho + \frac{Ia^2\,(2z^2-\rho^2)}{4\,(z^2+\rho^2)^{\frac{5}{2}}}\vec{e}_z .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2) Setzt man $z = x + \mathrm{i}y$ und $\chi = \phi + \mathrm{i}\psi$ ein und sortiert nach Real- und Imaginärteil, so ergibt sich

$$\begin{aligned} x &= \frac{h}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{U}\psi + 1 + e^{-\frac{\pi}{U}\psi}\cos\frac{\pi\phi}{U}\right), \\ y &= \frac{h}{2\pi}\left(\frac{\pi}{U}\phi + e^{-\frac{\pi}{U}\psi}\sin\frac{\pi\phi}{U}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Für $\phi = \pm U$ verschwindet das Glied $e^{-\frac{\pi}{U}\psi}\sin\frac{\pi\phi}{U}$, und man erhält $y = \pm\frac{h}{2}$. In diesem Fall ist $x = \frac{h}{2\pi}\left(1 - \frac{\pi}{U}\psi - e^{-\frac{\pi}{U}\psi}\right)$. Für $\psi \epsilon\, [-\infty, \infty]$ ist $x \epsilon\, [-\infty, 0]$. Für $\phi = 0$ folgt $y = 0$. In diesem Fall ist $x = \frac{h}{2\pi}\left(1 - \frac{\pi}{U}\psi + e^{-\frac{\pi}{U}\psi}\right)$ und $x \epsilon\, [-\infty, \infty]$.

Der Verlauf der Linien konstanten Potentials wird durch die Kurven $\phi =$ const gegeben, der Verlauf der Feldlinien wird durch die Kurven $\psi =$ const gegeben.

Die Feldlinien weit im Innern des Kondensators, also für große negative x, gehören zu großen posetiven Werten von ψ. Die Glieder mit Exponentialpotenzen werden dann vernachlässigbar klein. Man erhält $x \simeq \frac{h}{2\pi}\left(1 - \frac{\pi}{U}\psi\right) =$ const für $\psi =$ const und $y \simeq \frac{h}{2\pi}\frac{\pi}{U}\phi =$ const. Die Feldlinien verlaufen im Innern immer paralleler zur y-Achse, während die Potentiallinien parallel zur x-Achse sind. Im folgenden wird das elektrische Feld und die Potentiallinien skizziert.