Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

23.4.1998, Anleitung für die Betreuung der Präsenzübung Nr. 1

Aufgabe 1)

a) Bestimmen Sie das Feld einer Kugelschale mit der Ladung q und Radius r. Aus Symmetriegründen gilt $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\vec{e}_r$ mit $\vec{r} = r\vec{e}_r$. Aus der Maxwellgleichung $q = \oint \vec{D}\, d\vec{f}$ folgt für die Integration über eine Kugelfläche mit $r \leq R$ folgt $\vec{E}_{Innen} = 0$. Man integriert nun über eine Kugelschale mit $r \geq R$ und erhält $E(r) = q/(4\pi\varepsilon_0 r^2)$.

b) Um eine Ladung dq aus dem Unendlichen auf eine mit q geladene Kugel vom Radius R zu bringen, benötigt man die Energie $\int_R^\infty \frac{q\, dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$. Zeigen Sie, daß die Energie, die man benötigt, um eine zunächst neutrale Kugel auf diese Weise mit der Ladung Q aufzuladen, gerade der Feldenergie $W = \int \frac{E^2}{2}\varepsilon_0\, d^3r = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ entspricht.

c) Welchen Durchmesser besitzt eine mit einer Elementarladung geladene Kugelschale, wenn ihre Energie gleich der Ruheenergie mc^2 des Elektrons sein ist? Diesen Durchmesser bezeichnet man als klassischen Elektronenradius $r_E = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mc^2} = 2,810^{-15}m$. Streuexperimente liefern dagegen einen Elektronenradius kleiner als $10^{-20}m$.

Aufgabe 2)

a) Der bei Rückstreuung von Photonen an Elektronen maximale Energieverlust führt auf eine Wellenänderung $\Delta\lambda$, die die doppelte Comptonwellenlänge λ_c ist. Berechnen Sie λ_c. Die Energieerhaltung lautet

$$m_0c^2 + p_1c = \sqrt{(pc)^2 + (m_0c^2)^2} + p_2c\ .$$

Zusammen mit der Impulserhaltung $p_1 = p - p_2$ folgt $2m_0c(p_1 - p_2) = 4p_1p_2$. Mit $p = \frac{h}{\lambda}$ erhält man die Wellenlängenänderung $\Delta\lambda$ und die Comptonwellenlänge $\lambda_c = \frac{1}{2}\Delta\lambda = \frac{h}{mc}$. Der Quotient aus dem klassischen Elektronenumfang und der Comptonwellenlänge bezeichnet man als Feinstrukturkonstante $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} = \frac{1}{137}$.

b) Das Bohrsche Atommodell beruht auf der Annahme, daß der Bahndrehimpuls eines Elektrons, das sich um den Kern bewegt, in einem ganzzahligen Vielfachem von $\hbar$ gequantelt ist. Berechnen Sie den kleinstmöglichsten Bahnradius a_B eines Elektrons, und die Bindungsenergie auf der Bohrschen Bahn als Funktion der oben neu gewonnene Konstanten. Aus der Quantisierung $mvr = n\hbar$ des Drehimpulses und dem Kräftegleichgewicht $m\frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}$ folgt $r_n = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}n^2 \to a_B = r_1 = \frac{r_E}{\alpha^2}$ und die Bindungsenergie $E_b = -(E_{pot} + E_{kin}) = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a_B} = \frac{1}{2}\alpha^2 mc^2$.