Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

30.4.1998, Lösungen zur Präsenzübung Nr. 2

Aufgabe 1) Im Gleichgewicht gilt für die Gesamtenergie W der Seifenblase $\frac{dW}{dr} = 0$. W hat die folgenden 3 Beiträge:

- Coulombbeitrag:

$$W_c(r) = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{C^2U^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{(4\pi\epsilon_0 r^2)^2 U^2}{8\pi\epsilon_0 r} = 2\pi\epsilon_0 U^2 r \ ,$$

  wobei $C = 4\pi\epsilon_0 r$ die Kapazität der Kugel ist.

- Oberflächenspannungsbeitrag: $W_\sigma(r) = \sigma 4\pi r^2 2 = 8\pi\sigma r^2$,

- Druckbeitrag: $dW_p(r) = p\frac{dV}{dr}dr$.

Man erhält

$$\frac{dW}{dr} = 2\pi\epsilon_0 U^2 - 16\pi\sigma r + p\frac{dV}{dr} = 2\pi\epsilon_0 U^2 - 16\pi\sigma r + p4\pi r^2 \ .$$

Der Druck p aus der Gleichgewichtsbedingung $\frac{dW}{dr}|_{U=0} = 0$ vor dem Aufladen ist $p_0 = \frac{4\sigma}{R_0}$. Aus dem idealen Gasgesetz bei konstanter Temperatur $pV = p_0V_0$ folgt $p = 4\sigma\frac{R_0^2}{r^3}$. Die gesamte Gleichgewichtsbedingung lautet nun

$$2\pi\epsilon_0 U^2 - 16\pi\sigma r + 16\pi\sigma\frac{R_0^2}{r} = 0 \ .$$

Nach lösen dieser quadratischen Gleichung erhält man mit $\sigma = 0,05\frac{J}{m^2}$, $R_0 = 6cm$ und $U = 30kV$,

$$r = \frac{\epsilon_0 U^2}{16\sigma} + \sqrt{\frac{\epsilon_0^2 U^4}{16^2\sigma^2} + R_0^2} \approx 7,08cm \ .$$

Aufgabe 2) Es gibt die Feldgrößen E, D, B, H, mit den Materialgleichungen

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \ , \quad \vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} \ , \quad \vec{B} = \mu\vec{H} \ , \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \ ,$$

wobei $\vec{P}$ die Polarisation und $\vec{M}$ die Magnetisierung der Medien ist. Diese erfüllen die Maxwellgleichungen

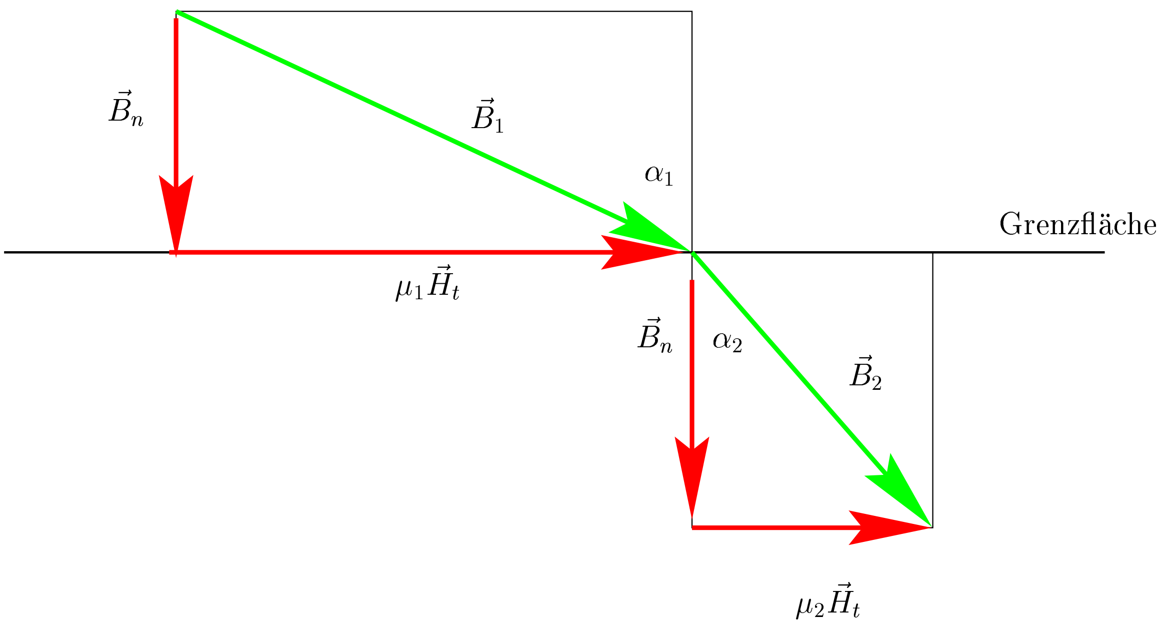
$$\vec{\nabla}\vec{D} = \rho \ , \quad \vec{\nabla}\vec{B} = 0 \ ,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \ , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \ .$$

Die Normalkomponenten von $\vec{B}$ und die Tangentialkomponenten von $\vec{H}$ sind an Grenzfächen stetig. Man kann daher ein dem Brechungsgesetz ähnlichen Sachverhalts für $\vec{B}$ erstellen,

$$\tan\alpha_1 = \frac{\mu_1 H_t}{B_n} \ , \quad \tan\alpha_2 = \frac{\mu_2 H_t}{B_n} \ .$$

Aus der Symmetrie der Maxwellgleichungen für statische Felder folgt, daß die Normalkomponente von $\vec{D}$ und die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ an Grenzflächen stetig sind. Man kann nun schreiben

$$\frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \ .$$



Aus der Symmetrie der Maxwellgleichungen für statische Felder folgt, daß die Normalkomponente von $\vec{D}$ und die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ an Grenzflächen stetig sind. Daher folgt für elektrische Felder,

$$\tan\alpha_1 = \frac{\epsilon_1 E_t}{D_n} \ , \quad \tan\alpha_2 = \frac{\epsilon_2 E_t}{D_n} \text{ und } \frac{\tan\alpha_1}{\tan\alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \ .$$