Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

7.5.1998, Lösungen zur Präsenzübung Nr. 3

Aufgabe 1) Das Potential bei $\vec{r}$ ist gegeben durch:

$$\phi(x,y,z) = \frac{e'}{r_1} - \frac{e'}{r_2}$$

mit $e' = \frac{e}{4\pi\epsilon_0}$. Es gilt für die Abstände mit $r^2 = x^2+y^2+z^2$, $r_1 = \sqrt{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} = r\sqrt{1 - \frac{ax}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2}}$. Die Wurzel kann entwickelt werden,

$$r_1 \approx r\left(1 - \frac{1}{2}\frac{ax}{r^2}\right) \ .$$

Entsprechendes gilt für r_2. Damit wird ϕ zu

$$\phi(x,y,z) = \frac{e'}{r}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}\frac{ax}{r^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{2}\frac{ax}{r^2}}\right) \ .$$

Gleichnamig machen der Brüche und unter Vernachlässigung von a^2 folgt dann

$$\phi(x,y,z) = \frac{e'ax}{r^3} \rightarrow \phi(\vec{r}) = \frac{\vec{p'}\cdot\vec{r}}{r^3}$$

mit $\vec{p'} = e'\vec{a} = \frac{\vec{p}}{4\pi\epsilon_0}$ Mittels des radialen Einheitsvektors kann man das Dipolpotential schreiben als

$$\phi(r,\theta) = \frac{\vec{p'}\cdot\vec{e_r}}{r^2} = \frac{p'cos\theta}{r^2} \ .$$

Daraus ergibt sich das elektrische Feld bie $r \gg a$ zu

$$\vec{E} = -\nabla\phi = \frac{2p'cos\theta}{r^3}\vec{e_r} + \frac{p'sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta = \frac{3\vec{p'}\vec{e}_r}{r^3}\vec{e_r} - \frac{\vec{p'}}{r^3} \ .$$

Die WW-Energie eines Dipols im äußeren Feld (Potential U) ist

$$W = e'U(\vec{r}+\vec{a}) - e'U(\vec{r}-\vec{a}) \ .$$

Für große Entfernungen zum Dipol kann man das Potential folgendermaßen entwickeln:

$$U(\vec{r} \pm \frac{\vec{a}}{2}) = U(\vec{r}) \pm \frac{\vec{a}}{2}\vec{\nabla}U, \rightarrow W = e'\vec{a}\cdot\vec{\nabla}U = -\vec{p}\vec{E} \ .$$

Die Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Dipolen $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$ ist daher

$$A = \frac{3(\vec{p}_1\vec{e}_r)(\vec{p}_2\vec{e}_r) - \vec{p}_1\vec{p}_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \ .$$

Aufgabe 2 Im Inneren des Gases ist die WW im Mittel 0, da für jede Abstandsvergrößerung zu einem Nachbarmolekül im Mittel eine Abstandsverringerung zu einem anderen Molekül auftritt. Am Rand jedoch fehlt diese Kompensation. Es erfolgt eine Abbremsung durch WW mit inneren Molekülen. Daher ist die Randgeschwindigkeit $\bar{v}_r < \bar{v}_i$ und die Energiebilanz lautet $\frac{1}{2}m\bar{v}_r^2 = \frac{1}{2}m\bar{v}_i^2 - A$ (A = WW-Energie).

Mit der Abschätzung:$|\bar{v}_i - \bar{v}_r| = \Delta v \ll \bar{v}_i$ entwickelt man

$$E_{kin}(\bar{v}_r) \approx \frac{1}{2}m\bar{v}_i^2 - \left.\frac{\partial E}{\partial v}\right|_{v_i} \Delta v \ .$$

In die Energiebilanz eingesetzt ergibt $A = mv_i(\bar{v}_i - \bar{v}_r)$.

- Druckbetrachtungen im Gas
  Der Druck ergibt sich aus $P = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \frac{1}{F}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$. Der Druck ergibt sich also aus dem mittleren Impulsübertrag $\Delta\vec{p}$ der Teilchen, die auf die Fläche F pro Zeitintervall Δt stoßen.

  $$\text{Impulsübertrag} = 2m\bar{v}_r \ , \quad \text{Teilchenanzahl} = \frac{1}{6}\bar{v}_i \Delta t F n$$

  wobei n die Teilchendichte ist.

  $$\Rightarrow \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{6}\bar{v}_i F n 2m\bar{v}_r \Rightarrow P = \frac{m\bar{v}_i\bar{v}_r n}{3} = \frac{n}{3}(m\bar{v}_i^2 - A) = \frac{n}{3}(3kT - A) \ ,$$

  wobei $\frac{1}{2}m\bar{v}_i^2 = \frac{3}{2}kT$ verwendet wurde. Schließlich und letztendlich bestimmt sich der Binnendruck a aus der van-der-Waals Gleichung $nkT = p + \frac{a}{V^2}$ zu

  $$a = \frac{V^2 nA}{3} = \frac{VAN_A}{3} \ .$$

- Abschätzung von a(Binnendruckterm) Für Dipole ist $a = \frac{VN_A}{3}\frac{\vec{p}^2}{4\pi\epsilon_0 r^3}$ mit dem mittlerer Molekülabstand $r \approx \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$.

  Beispiel HCl: $\vec{p} \approx e \cdot 1\text{Å} \Rightarrow a = \frac{VN_A}{12}\frac{\vec{p}^2 n}{\pi\epsilon_0} = \frac{N_A^2\vec{p}^2}{12\pi\epsilon_0} = 0,28Jm^3$.