Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

14.5.1997, Lösungen zur Präsenzübung Nr.4

Einführung in orthogonale und vollständige Funktionensätze: Wir wollen im folgenden komplexe Funktionen betrachten, die auf dem Intervall $[-1,1]$ definiert sind. Hier nennen wir zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ orthogonal auf diesem Intervall, wenn $\int_{-1}^{1} f(x)g^*(x)dx = 0$. Eine symbolische Schreibweise hierfür ist $< f|g >= 0$. Eine Funktion $f(x)$ heißt normiert, wenn $< f|f >= 1$. Eine Menge von Funktionen $\{\ldots, f_{-1}(x), f_0(x), f_1(x), \ldots\}$ heißt ein orthonormaler Funktionensatz, wenn $< f_l|f_{l'} >= \delta_{ll'}$. Zusätzlich nennt man diese Menge von Funktionen vollständig, wenn $\sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x)f_l^*(x') = \delta(x-x')$.
Solche orthonormale vollständige Funktionensätzte sind sehr nützlich, denn man kann jede Funktion $g(x)$ als Summe von Funktionen f_n schreiben,

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_{-1}^{1} G(x')\delta(x-x')dx' = \int_{-1}^{1} G(x') \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x)f_l^*(x')dx' \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} < G|f_l > f_l(x) \ , \quad < G|f_l >= \int_{-1}^{1} G(x)f_l^*(x)dx \ . \end{aligned}$$

Besonders nützlich sind orthonormale vollständige Funktionensätzt, deren Funktionen Eigenschaften haben, die nicht jede Funktion $G(x)$ hat. Wenn beispielsweise ein Satz existiert, dessen Funktionen die Eigenschaft haben, daß $\partial_x f_l(x) = \mathrm{i}\pi l f_l(x)$, dann kann man die beliebige Funktion $G(x)$ sofort integrieren, denn

$$\int_0^x G(x')dx' = \sum_{l=-\infty}^{\infty} < G|f_l > \int_0^x f_l(x')dx' = C + \sum_{l=-\infty}^{\infty} < G|f_l > \frac{1}{\mathrm{i}\pi l} f_l(x) \ ,$$

mit einer beliebigen Konstante C. Solch ein Satz von Funktionen existiert tatsächlich, denn

$$\begin{aligned} \partial_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi l x} &= \mathrm{i}\pi l \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi l x} \ , \quad \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi l x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi l' x} dx = 2\delta_{ll'} \ , \\ \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi l x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi l x'} &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi l (x-x')} = 2\delta(x-x') \ . \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, da sich $\exp(\mathrm{i}\pi l(x-x'))$ zu Null mittelt, außer wenn $x = x'$ ist. Außerdem ist $\int_{-1}^{1} \exp(\mathrm{i}\pi l x)dx = 0$ für alle $l \neq 0$ und daher

$$\int_{-1}^{1} [\sum_{l=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi l(x-x')}] dx = 2 \ .$$

Somit ist die Summe über $\frac{1}{2}\exp(\mathrm{i}\pi n(x-x'))$ tatsächlich eine Deltafunktion. Für das Funktionensystem $\{\ldots, f_{-1}, f_0, f_1, \ldots\} = \{\ldots, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}, \ldots\}$ gelten also die folgenden Gleichungen, die es zu einem orthonormalen und vollständigen Funktionensystem machen,

$$< f_l | f_{l'} >= \delta_{ll'} \ , \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x) f_l^*(x') = \delta(x - x') \ ,$$

das die Eigenschaft $\partial_x f_l(x) = \mathrm{i}\pi l f_l(x)$ hat. Man kann also jede Funktion $G(x)$ schreiben als

$$G(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi l x} \ , \quad g_l = \int_{-1}^{1} G(x) \exp(-\mathrm{i}\pi l x) dx =< G | f_l > \ .$$

Man nennt dies die Fourierreihe von $G(x)$. Andere vollständige Funktionensysteme haben andere nützliche Eigenschaften. Bei der Suche des Potentials der Kugel im Dielektrikum werden wir von einem weiteren Gebrauch machen.

Aufgabe 1) Da keine freien Ladungen vorhanden sind, gilt sowohl innerhalb als auch außerhalb der Kugel $\nabla\vec{D} = 0$. $\nabla\vec{E} = 0$ gilt hingegen nur für $r \neq a$, aber sowohl innerhalb als auch außerhalb der Kugel. Daraus ergibt sich $\Delta\Phi = 0$. Aufgrund der Symmetrie empfiehlt es sich, mit Kugelkoordinaten zu arbeiten,d.h. $\Phi(r, \vartheta, \vartheta)$. Der Laplaceoperator lautet in Kugelkoordinaten

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial_r}(r^2\frac{\partial}{\partial_r}\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial_\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial_\vartheta}\Phi) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\Phi \ .$$

Das Potential darf aus Symmetriegründen nicht von φ abhängen und daher gilt

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial_r}(r^2\frac{\partial}{\partial_r}\Phi) + \frac{1}{r^2 \sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial_\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial_\vartheta}\Phi) \ .$$

Für ein beliebiges orthonormales und vollständiges Funktionensystem, das wir statt von $-\infty$ bis ∞ ebensogut von 0 bis ∞ als $\{P_0(x), P_1(x), \ldots\}$ indizieren können, können wir Φ schreiben als

$$\Phi(r, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \Phi_l(r) P_l(\cos\vartheta) \ .$$

Da das Potential reell sein soll, setzten wir voraus, daß die P_l reell sind. Die Koeffizienten ergeben sich dann zu

$$\Phi_l(r) = \int_{-1}^{1} \Phi(r,\vartheta) P_l(\cos\vartheta) d\cos\vartheta = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(r,\vartheta) P_l(\cos\vartheta) \sin\vartheta d\vartheta =< \Phi | P_l > \ .$$

In die Laplacegleichung eingesetzt ergibt sich

$$\Delta\Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^2}[\frac{\partial}{\partial_r}(r^2\frac{\partial}{\partial_r}\Phi_l(r)) P_l(\cos\vartheta) + \Phi_l(r)\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial_\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial_\vartheta}P_l(\cos\vartheta))] = 0 \ .$$

Diese Gleichung könnte vereinfacht werden, wenn es ein Funktionensystem gäbe, in dem $\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial_\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial_\vartheta}P_l(\cos\vartheta))$ proportional zu $P_l(\cos\vartheta)$ wäre. Denn dann wäre

$$\Delta\Phi = \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^2}[\frac{\partial}{\partial_r}(r^2\frac{\partial}{\partial_r}\Phi_l(r)) + \Phi_l(r)C_l]P_l(\cos\vartheta) = 0$$

mit den Proportionalistätskonstanten C_l. Multipliziert man diese Gleichung mit $P_{l'}(\cos\vartheta)$ und integriert, so folgt

$$\begin{aligned} < \Delta\Phi|P_{l'} > &= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{r^2}[\frac{\partial}{\partial_r}(r^2\frac{\partial}{\partial_r}\Phi_l(r)) + \Phi_l(r)C_l] < P_l|P_{l'} > \\ &= \frac{1}{r^2}[\frac{\partial}{\partial_r}(r^2\frac{\partial}{\partial_r}\Phi_{l'}(r)) + \Phi_{l'}(r)C_{l'}] = 0\ . \end{aligned}$$

Es würde dann also eine Differentialgleichung für jedes $\Phi_{l'}(r)$ folgen. Mit solch einem Funktionensystem wäre es also gelungen, die partielle Laplacegleichung in zwei Variablen zurückzuführen auf einen Satz von Differentialgleichungen einer Veränderlichen. Da Differentialgleichungen einer Veränderlicher oft viel einfacher zu lösen sind, als partielle Differentialgleichungen, wurde nach solch einem Funktionensystem gesucht. Und tatsächlich gibt es solch ein Funktionensystem. Die Funktionen heißen Legendrepolynome und haben die folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} P_0 = 1\ ,\quad P_1(x) = x\ ,\quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)\ ,\quad P_l(x) &= \frac{1}{2!l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l\ , \\ < P_l|P_{l'} >= \delta_{ll'}\ ,\quad \sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)P_l(x') &= \delta(x-x')\ , \\ \frac{1}{\sin\vartheta}[\frac{\partial}{\partial_\vartheta}(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial_\vartheta} + l(l+1)]P_l(\cos\vartheta) &= 0 \text{ und daher} \\ \{\partial_x(1-x^2)\partial_x + l(l+1)\}P_l(x) &= 0\ . \end{aligned}$$

Der Laplaceoperator auf $\Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\Phi_l(r)P_l(\cos\vartheta)$ angewendet ergibt

$$\Delta\Phi = \sum_{l,m}\{\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) - \frac{l(l+1)}{r^2}R\}P_l(\cos\vartheta)\ .$$

Da die Legendrepolynome orthogonal sind, muß der in geschweiften Klammern geschriebene Term Null sein. Die Gleichung

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{dR}{dr}) - \frac{l(l+1)}{r^2}R = 0$$

wird mit dem Ansatz $R(r) = \frac{1}{r}u(r)$ zu $(\frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2})u(r) = 0$. Diese Gleichung hat die Lösung $u(r) = Ar^{l+1} + Br^{-l}$. Das Potential hat folgende Struktur:

$$\Phi(r,\vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left[A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}\right]P_l(\cos\vartheta)\ .$$

Die Koeffizienten bestimmen sich durch die Randbedingungen des konkreten physikalischen Problems. Bei $r = 0$ soll Φ endlich sein, daher gilt $\Phi_{\text{innen}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\vartheta)$. In großem Abstand soll Φ gegen $-E_\infty z = -E_\infty r \cos\vartheta$ gehen. Daher folgt außen $A_l = 0$ für $l \neq 1$ und $\Phi_{\text{außen}} = -E_\infty r\cos\vartheta + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\vartheta)$. Nun müssen die beiden Lösungen bei $r = a$ aneinander angepaßt werden. Die Normalkomponente des D–Feldes und die Tangentialkomponente des E–Feldes sind an der Oberfläche stetig. Daraus ergibt sich

$$-\frac{1}{a}\partial_\vartheta \Phi_{\text{innen}}(a,\vartheta) = -\frac{1}{a}\partial_\vartheta \Phi_{\text{außen}}(a,\vartheta) \ , \quad -\epsilon_2 \partial_r \Phi_{\text{innen}}(a,\vartheta) = -\epsilon_1 \partial_r \Phi_{\text{außen}}(a,\vartheta) \ .$$

Setzt man die Potentiale im Äußeren und im Inneren ein, so erhält man zwei Summen über verschiedene P_l, deren einzelne Vorfaktoren verschwinden müssen.

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty}[A_l a^{(l-1)} - B_l r^{-(l+2)}]\partial_\vartheta P_l(\cos\vartheta) + E_\infty \cos\vartheta &= 0 \ , \\ \sum_{l=0}^{\infty}[l\epsilon_2 A_l r^{(l-1)} + (l+1)\epsilon_1 B_l a^{-(l+2)}] P_l(\cos\vartheta) + \epsilon_1 E_\infty \cos\vartheta &= 0 \ . \end{aligned}$$

Für die einzelnen Summanden muß daher gelten

$$\begin{aligned} B_0 &= 0 \ , \quad A_1 = B_1 a^{-3} - E_\infty \ , \quad A_1 = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}(2B_1 a^{-3} + E_\infty) \ , \\ A_l &= B_l a^{-(2l+1)} \ , \quad A_l = -\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}(l+1) B_l a^{-(2l+1)} \ , \quad l \geq 2 \ . \end{aligned}$$

Die letzten beiden Gleichungen können nur dann gleichzeitig erfüllt sein, wenn $A_l = B_l = 0$ ist für $l \geq 2$. Aus den ersten Gleichungen ergibt sich

$$A_1 = -\frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_\infty \ , \quad B_1 = -\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_\infty a^3 \ .$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung führt auf

$$\begin{aligned} \Phi_{innen} &= -\frac{3\epsilon_1}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_\infty r \cos\vartheta \ , \\ \Phi_{außen} &= -E_\infty r\cos\vartheta - a^3 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2} E_\infty \frac{\cos\vartheta}{r^2} \ . \end{aligned}$$

Im Innern bildet sich also ein homogenes Feld aus, und im Außenraum hat man die Überlagerung eines homogenen Feldes und eines Dipolfeldes.