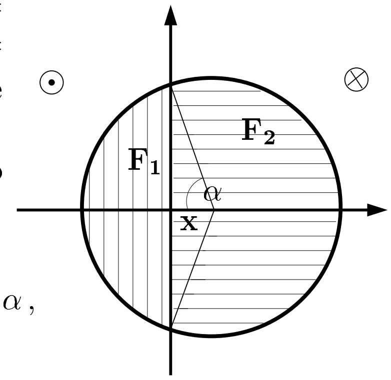
Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

30.4.1998, Lösungen zur Präsenzübung Nr. 5

Aufgabe 1)

a) Die induzierte Spannung für die bewegte Leiterschleife folgt aus $U_{ind} = -\frac{d\phi}{dt}$ mit dem magnetischen Fluß $\phi = \iint \vec{B}\, d\vec{f}$. Mit nebenstehender Skizze folgt $\phi = B\,(2F_1 - \pi R^2)$ mit $|\vec{B}| = B$. Für den Flächenabschnitt F_1 innerhalb des linken Halbraumes gilt



$$F_1 = \int_0^R \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} r\, dr\, d\varphi - R \sin\alpha \cos\alpha\,,$$
$$F_1 = R^2 \left(\alpha - \frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)\,.$$

Der Winkel α und der Mittelpunkt des Kreises sind über $\cos\alpha = \frac{x}{R}$ miteinander verknüpft, woraus sich die Ableitung zu $\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{\sin\alpha}\frac{v}{R}$ berechnet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ tritt der Ring in den zweiten Halbraum ein. Deshalb gilt für die Bewegung seines Mittelpunktes $x = -R + vt$. Mit diesen Überlegungen folgt für die induzierte Spannnung

$$\begin{aligned} U_{ind} &= -2B\frac{dF_1}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt} = 2BvR\frac{1-\cos 2\alpha}{\sin\alpha} = 4BvR\sin\alpha \\ &= 4BRv\sqrt{\frac{vt}{R}\left(2 - \frac{vt}{R}\right)} \text{ für } t\epsilon[0, \frac{2R}{v}]\,. \end{aligned}$$

Zu den übrigen Zeiten beträgt die Spannung Null.

b) Die exakte Lorentztransformation ist durch $\vec{E}' = \gamma\vec{v} \times \vec{B}$ gegeben. Für $\frac{v}{c} \ll 1$ folgt $\vec{E}' = \vec{v} \times \vec{B} = -vB\vec{e}_y'\mathrm{sgn}(x)$. Zusammen mit dem Bogenelement $d\vec{s}' = Rd\varphi\left(-\sin\varphi\vec{e}_x' + \cos\phi\vec{e}_y'\right)$ wird das elektrische Feld in die induzierte Spannung des mitbewegten Systems eingesetzt,

$$\begin{aligned} U' &= vBR\left[\int_{-\pi+\alpha}^{\pi-\alpha} \cos\varphi\, d\varphi - \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \cos\varphi\, d\varphi\right] = 4vBR\sin\alpha \\ &= 4BRv\sqrt{\frac{vt}{R}\left(2 - \frac{vt}{R}\right)}\,. \end{aligned}$$