Gruppenübungen zur theoretischen Mechanik (Rose/Hoffstätter)

4.6.1998, Aufgabenblatt zur Präsenzübung Nr. 6

Aufgabe 1)

a) Das Potential $\Phi(\vec{r})$ am Aufpunkt $\vec{r}$ einer Ladung Q am Quellpunkt $\vec{r}'$ ist gegeben durch

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{r^2-2rr'\cos\theta+r'^2}} \quad .$$

Entwickeln Sie den Bruch mit der Wurzelbis zur zweiten Ordnung nach $(\frac{r_<}{r_>})$ wobei $r_< = \min(r,r')$ und $r_> = \max(r,r')$ ist. Die Potenzreihenentwicklung hat dabei die Form $\frac{1}{r_>}\sum_{l=0}^{\infty}(\frac{r_<}{r_>})^l P_l(\cos\Theta)$. Man bezeichnet daher den Ausdruck,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} t^l P_l(x)$$

auch als Erzeugendefunktion der Legendre Polynome.

b) Zeigen Sie nun, daß die Legendre-Polynome Lösungen für den Winkelanteil des Laplace-Operators sind.

c) Zeigen Sie die Orthogonalität

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_n(x)dx = N_l\delta_{ln}$$

der Legendrepolynome. Verwenden Sie dabei

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-2sx+s^2}\sqrt{1-2tx+t^2}} = \frac{1}{\sqrt{st}}\ln\frac{1+\sqrt{st}}{1-\sqrt{st}} \; .$$

d) Erstellen Sie eine Rekusionsformel; benutzen Sie dabei die Erzeugendefunktion aus Teil a) und leiten sie nach dem Parameter t ab.

Aufgabe 2) Hier noch ein Anwendungsbeispiel. Das Potential einer Kugeloberfläche sei bekannt. Der Bereich innen sei raumladungsfrei, gesucht wird das Potential innen . Berechnen Sie anschliesend das Potential in einem raumladungsfreien Außenraum.