Gruppenübungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

18.6.1998, Lösungen zur Präsenzübung Nr. 7

Aufgabe 1) Zunächst habe der Stab die Länge l. Seine Längsachse falle mit der z-Achse eines Koordinatensystems zusammen. Das Potential Φ ist bezüglich der z-Achse dann rotationssymmetrisch. Im Aufpunkt $P(\rho_0, z_0)$ habe es den Wert

$$\Phi(\rho_0, z_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{\lambda dz}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + C_1 \ .$$

Die Konstante C_1, die noch von l abhängen kann, dient dazu, einen geeigneten Potentialnullpunkt festzulegen. Aus der Skizze folgt $\vec{r} - \vec{r}' = (z_0 - z)\vec{e}_z + \rho_0 \vec{e}_\rho \rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - z)^2}$

$$\Phi(\rho_0, z_0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^l \frac{dz}{\sqrt{(z_0 - z)^2 + \rho_0^2}} + C_1 \ .$$

Mittels der Substitution $v = \sqrt{\rho_0^2 + (z_0 - z)^2} - (z_0 - z)$ und $\frac{dv}{v} = \frac{dz}{(z_0 - z) + v}$ erhält man

$$\Phi(\rho_0, z_0) = C_1 + \int\limits_{\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} - z_0}^{\sqrt{\rho_0^2 + (l - z_0)^2} - z_0 + l} \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{dv}{v} = C_1 + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\rho_0^2 + (l - z_0)^2} - z_0 + l}{\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} - z_0} \ .$$

Man kann $\Phi = 0$ für $\rho_0 = R$ und $z_0 = 0$ wählen und erhält für C_1

$$C_1 = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{\sqrt{R^2 + l^2} + l} \ .$$

Nach Einsetzen in die Gleichung für das Potential folgt

$$\Phi(\rho_0, z_0) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} - z_0} + \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{1 - \frac{z_0}{l} + \sqrt{\frac{\rho_0^2}{l^2} + \left(1 - \frac{z_0}{l}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2}}} \ .$$

Durch die spezielle Wahl des Potentialnullpunktes kann der Grenzübergang $l \rightarrow \infty$ jetzt vollzogen werden

$$\lim_{l \to \infty} \Phi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} - z_0} \ .$$

Als Flächen mit $\Phi = $ const. erhält man Rotationsparaboloide mit der Gleichung

$$\begin{aligned}
\sqrt{\rho_0^2 + z_0^2} - z_0 &= Re^{-4\pi\epsilon_0\lambda^{-1}\Phi} = const. = C_2 R \ , \\
z_0 + C_2\frac{R}{2} &= \frac{1}{2C_2}\frac{\rho_0^2}{R} \ .
\end{aligned}$$

Als Schnittkurven mit einer Ebene, die die Stabachse enthält, ergeben sich konfokale Parabeln, die in Richtung positiver z-Achse geöffnet sind. Der Brennpunkt liegt in $z = \rho = 0$.