Gruppenübungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

25.6.1998, Aufgabenblatt zur Präsenzübung Nr. 8

Aufgabe 1) Wie in der Präsenzübung Nr. 4 gezeigt, kann eine Funktion $G(x)$ auf dem Intervall $[-1,1]$ geschrieben werden als

$$f_l = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{il\pi x} \ , \quad < G|f_l >= \int_{-1}^{1} G(x) f_l^*(x) dx \ , \quad G(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} < G|f_l > f_l(x) \ . \qquad (1)$$

Dies ist möglich, da die Funktionen f_l auf dem Intervall $[-1,1]$ einen vollständigen orthogonalen Satz von Funktionen bilden, denn

$$\int_{-1}^{1} f_l(x) f_{l'}^*(x) dx = \delta_{ll'} \ , \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x) f_l^*(x') = \delta(x - x') \ .$$

Die Darstellung (1) wird als Fourierreihe der Funktion $G(x)$ bezeichnet.

a) Schreiben Sie die Funktion $G(x)$, die auf dem Intervall $[-L, L]$ definiert ist, als Fourierreihe.

b) Führen Sie den Grenzübergang $L \to \infty$ durch, um mit $f_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ die Fouriertransformierte

$$g(k) =< G|f_k >= \int_{-\infty}^{\infty} G(x) f_k^*(x) dx$$

herzuleiten, durch die man wiederum die Funktion $G(x)$ darstellen kann als

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} < G|f_k > f_k(x) dk \ .$$

Aufgabe2)

a) Was ist die Fouriertransformierte der Deltafunktion $\delta(x - x_0)$?

b) Zeigen Sie, daß die Darstellung $\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_0 - x)} dk$ die folgenden Eigenschaften hat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x) \delta(x - x_0) dx = G(x_0) \ , \quad \int_{-\infty}^{\infty} G(x) \frac{d}{dx} \delta(x - x_0) dx = -\frac{d}{dx} G(x_0) \ .$$

Aufgabe3) Berechnen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation das Potential einer Punktladung aus $\vec{\nabla}^2 \Phi(\vec{r}) = -\delta(\vec{r})$.