Gruppenübungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

25.6.1998, Lösungen zur Präsenzübung Nr. 8

**Aufgabe 1)**

a) Wenn $G(x)$ auf $[-L, L]$ definiert ist, so ist $\tilde{G}(x) = G(Lx)$ auf $[-1, 1]$ definiert. Schreibt man $\tilde{G}(x)$ als Fourierreihe, so folgt

$$f_l = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{il\pi x} \ , \quad <\tilde{G}|f_l> = \int_{-1}^{1} \tilde{G}(x) f_l^*(x) dx \ , \quad \tilde{G}(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} <\tilde{G}|f_l> f_l(x) \ .$$

ersetzt man nun $x$ durch $x/L$ so folgt mit einer neuen Definition von $f_l(x)$ und $<G|f_l>$ die Fourierreihe

$$f_l = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{il\pi \frac{x}{L}} \ , \quad <G|f_l> = \int_{-L}^{L} G(x) f_l^*(x) dx \ , \quad G(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} <G|f_l> f_l(x) \ .$$

Auf dem Intervall $[-L, L]$ gilt nun

$$<f_l|f_{l'}> = \int_{-L}^{L} f_l(x) f_{l'}^*(x) dx = \delta_{ll'} \ , \ \sum_{l=-\infty}^{\infty} f_l(x) f_l^*(x') = \delta(x - x') \ .$$

b) Mit $k = \pi l/L$ folgt

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{ikx} \ , \ <G|f_k> = \int_{-L}^{L} G(x) f_k^*(x) dx \ , \ G(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} <G|f_k> f_k(x) \Delta l \ ,$$

mit $\Delta l = 1$. Aus $\Delta k = \pi \Delta l/L$ folgt nun

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{ikx} \ , \ <G|f_k> = \int_{-L}^{L} G(x) f_k^*(x) dx \ , \ G(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} <G|f_k> f_k(x) \Delta k \frac{L}{\pi} \ ,$$

wobei nun die Summe von $-\infty$ bis $\infty$ jeweils um $\Delta k$ erhöht wird. Nun erhält man mit neuen Basisfunktionen $f_k(x)$ nach dem Grenzübergang $L \to \infty$ die Fouriertransformation

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \ , \ <G|f_k> = \int_{-\infty}^{\infty} G(x) f_k^*(x) dx \ , \ G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} <G|f_k> f_k(x) dk \ .$$

**Aufgabe2)**

a) Die Fouriertransformierte der Deltafunktion ist

$$< \delta(x-x_0)|f_k >= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f_k^*(x)dx = f_k^*(x_0) \ , \quad < \delta(x)|f_k >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ .$$

b) Mit der Fouriertransformierten $g(k) =< G|f_k >= \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\frac{e^{-ikx}}{\sqrt{2\pi}}dx$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\delta(x-x_0)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x_0-x)}dkdx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} < G|f_k > f_k(x_0)dk = G(x_0) \ . \\
\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\frac{d}{dx}\delta(x-x_0)dx &= \int_{-\infty}^{\infty} G(x)\frac{d}{dx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x_0)}dkdx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(x)\int_{-\infty}^{\infty} ike^{ik(x-x_0)}dkdx = \int_{-\infty}^{\infty} g(k)ik\frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}dk \\
&= -\frac{d}{dx_0}\int_{-\infty}^{\infty} g(k)\frac{e^{-ikx_0}}{\sqrt{2\pi}}dk = -\frac{d}{dx_0}G(x_0) \ .
\end{aligned}$$

**Aufgabe3)** Die Fouriertransformation beider Seiten von $\vec{\nabla}^2\Phi(\vec{r}) = -\delta(\vec{r})$ liefert $\vec{k}^2\phi(\vec{k}) = 1/\sqrt{2\pi}^3$. Damit ist $\phi(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3\vec{k}^2}$ die Fouriertransformierte von $\Phi(\vec{r})$,

$$\begin{aligned}
\Phi(\vec{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3(k_x^2+k_y^2+k_z^2)}\frac{e^{ik_xx}}{\sqrt{2\pi}}dk_x\frac{e^{ik_yy}}{\sqrt{2\pi}}dk_y\frac{e^{ik_zz}}{\sqrt{2\pi}}dk_z \\
&= \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \frac{e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}}{\vec{k}^2}k^2\sin\theta dkd\theta d\phi \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty} e^{ikrx}dkdx = \frac{1}{(2\pi)^2 r}\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty} e^{i\tilde{k}x}d\tilde{k}dx \ .
\end{aligned}$$

Hätte man in der Fouriertransformation alle komplexen Größen durch ihr Konjugiertes ersetzt, so hätte sich folgendes ergeben:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^2 r}\int_{-1}^{1}\int_0^{\infty} e^{-i\tilde{k}x}d\tilde{k}dx \ .$$

Damit folgt nun $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi r}\int_{-1}^{1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tilde{k}x}d\tilde{k}dx = \frac{1}{4\pi r}\int_{-1}^{1}\delta(x)dx = -\frac{1}{4\pi r}$.