Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

2.7.1998, Lösungen zur Präsenzübung Nr. 9

Aufgabe 1) Die Kraft auf eine Stromdichte $\vec{j}$ im magnetischen Feld $\vec{B}$ ist durch $\vec{F} = \int \vec{j} \times \vec{B}\, dV$ gegeben. In dünnen Leitern folgt $\vec{F} = I \int d\vec{r} \times \vec{B}$. Das Magnetfeld des unendlich langen Leiters ist in Zylinderkoordinaten durch $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi$ gegeben. Man parametrisiert nun die Beiträge der vier Wege I-IV und erhält

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\left[\int_d^{d+a} \frac{1}{\rho}\, d\rho \vec{e}_z + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{dz}{d+a}\vec{e}_\rho - \int_d^{d+a} \frac{1}{\rho}\, d\rho \vec{e}_z - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{dz}{d}\vec{e}_\rho\right] \\
&= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{ab}{d\,(d+a)}\vec{e}_\rho\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2)

a.) Der Fluß durch das Rechteck beträgt $\phi_2 = \oint_2 \vec{B}_1 d\vec{f}_2 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz \int_d^{d+a} \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi} b \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)$. Die Beziehung zwischen Strom des geraden Leiters und des magnetischen Flusses durch die rechteckige Leiterschleife, $\phi_2 = L_{21} I_1$, führt auf die Gegeninduktivität $L_{21} = L_{12} = \frac{\mu_0 b}{2\pi}\ln\left(1 + \frac{a}{d}\right)$.

b.) Aus der Definition der Gegeninduktivität folgt

$$\begin{aligned}
L_{12} = L_{21} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_1\oint_2 \frac{d\vec{r}_1 \cdot d\vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\Big\{\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz_2 \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + d^2}} \\
&\quad - \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz_2 \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 \frac{1}{\sqrt{(z_1 - z_2)^2 + (d+a)^2}}\Big\} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dz_2 \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + d^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (d+a)^2}}\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} b \ln\left[\frac{x + \sqrt{x^2 + d^2}}{x + \sqrt{x^2 + (d+a)^2}}\right]\Bigg|_{x=-\infty}^{x=\infty} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} b \lim_{L\to\infty} \ln\left[\frac{L + \sqrt{L^2 + d^2}}{L + \sqrt{L^2 + (d+a)^2}}\,\frac{-L + \sqrt{L^2 + (d+a)^2}}{-L + \sqrt{L^2 + d^2}}\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} b \lim_{L\to\infty} \ln\left[\frac{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{d}{L}\right)^2}}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{d+a}{L}\right)^2}}\,\frac{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{d+a}{L}\right)^2}}{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{d}{L}\right)^2}}\right]\,.
\end{aligned}$$

Die Entwicklung der Wurzel führt auf das selbe Ergebnis wie in Aufgabe a.),

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} b \ln\left(1 + \frac{a}{d}\right) \ .$$