Übungen zur theoretischen Elektrodynamik (Rose/Hoffstätter)

7.5.1998, Lösungen zur Semestralklausur

Aufgabe 1) Der Wert des Dielektrikums des Kondensators hängt nur von der Höhe h ab. Für die Oberflächenladung σ gilt:

$$\sigma = \frac{dQ}{df} = D = \epsilon E = \epsilon \frac{U}{d};\ dF = ldh.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q &= \frac{U}{d}\tilde{\epsilon}e^{-\alpha h} l \mathrm{d}h; \\ Q &= \int_0^l \frac{U}{d}\tilde{\epsilon}e^{-\alpha h}\mathrm{d}hl = -\frac{U}{d}\tilde{\epsilon}\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha h}|_0^l l = \frac{U}{d}\tilde{\epsilon}\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha l})l = \frac{U}{d}\frac{l}{\alpha}(\epsilon(0)-\epsilon(l)) \ . \end{aligned}$$

Die Kapazität des Kondensators ist durch $Q = CU$ definiert, $C = \frac{l}{\alpha d}(\epsilon(0)-\epsilon(l))$.

Aufgabe 2)

a) Die Bewegung gehorcht der nicht relativistischen Lorentzgleichung

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \ .$$

Das B - Feld zeigt in Richtung der z -Achse, $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Es gilt

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix},\ \vec{B} = B\vec{e_z},\ \vec{v} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} \dot{y}B \\ -\dot{x}B \end{pmatrix}.$$

Damit läßt sich die Lorentzgleichung umschreiben als

$$\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = \frac{qE}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{qB}{m}\begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix}.$$

Formuliert man die DGL in den Geschwindigkeitskomponenten des Teilchens, dann nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\begin{pmatrix} \dot{v}_x \\ \dot{v}_y \end{pmatrix} = \frac{qE}{m}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix} v_y \\ -v_x \end{pmatrix}\ ,\quad \omega = \frac{qB}{m} \ .$$

Einsetzen der 2. Zeile in die nach der Zeit abgeleitete 1. Zeile ergibt

$$\ddot{v}_x = -\omega^2 v_x \ .$$

Aus der zweiten Zeile folgt

$$v_x = a\sin\omega t, v_y = a\cos\omega t + A\ .$$

$v_y(0) = 0$ führt auf $A = -a$. Einsetzen der Lösungsansätze in $\dot{v}_x = \frac{qE}{m} + \omega v_y$ führt auf $A = -\frac{qE}{m\omega} = -\frac{E}{B}$. Die Lösung der Bewegungsgleichung sieht daher folgendermaßen aus:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \frac{E}{B}\begin{pmatrix} \sin\omega t \\ \cos\omega t - 1 \end{pmatrix}\ .$$

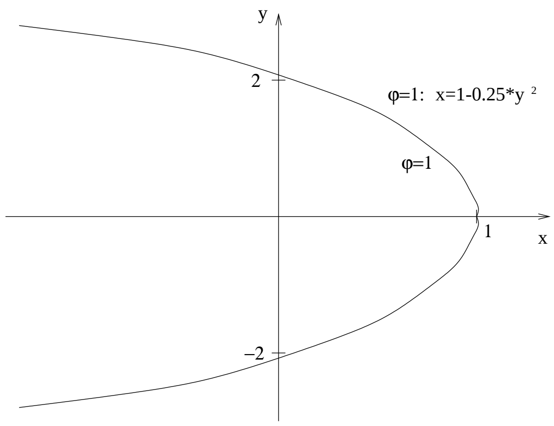
b)

$$\begin{aligned}
|\vec{v}|^2 &= {v_x}^2 + {v_y}^2 \\
&= (\frac{E}{B})^2(\sin^2\omega t^2 + \cos^2\omega t + 1 - 2\cos\omega t) \\
&= 2\frac{E^2}{B^2}(1-\cos\omega t) = 4\frac{E^2}{B^2}\sin^2\frac{\omega t}{2}
\end{aligned}$$

Daraus folgt $|\vec{v}| = 2\frac{E}{B}\sin\frac{\omega t}{2}$ und $|\vec{v}|_{max} = 2\frac{E}{B}$. Um die Bedingung $|\vec{v}_{max}| \ll c$ zu erfüllen, muß gelten $B \gg 2\frac{E}{c}$, also $B \gg \frac{2}{3}10^{-2}T$.

Aufgabe 3)

a) Einsetzen ergibt $x + iy = \varphi^2 - \psi^2 + 2i\varphi\psi$. Daraus folgt $x = \varphi^2 - \psi^2$, $y = 2\varphi\psi$. Auflösen nach ψ , $\psi = \frac{y}{2\varphi}$ und einsetzen, $x = \varphi^2 - \frac{y^2}{4\varphi^2}$ $\varphi = const.$ führt auf zur negativen x-Achse hin geöffneten Parabeln . Für $\varphi = 1$ ergibt sich $x = 1 - \frac{y^2}{4}$.



b) Senkrecht!

c) Es gilt

$$\bar{E} = E_x - iE_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} + i\frac{\partial\varphi}{\partial y}$$

Mit $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ lassen sich die Ableitungen nach x und y ausdrücken durch

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}};\ \frac{\partial}{\partial y} = i(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}}).$$

Einsetzen in die Definitionsgleichungen ergibt

$$\bar{E} = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = -2\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

φ läßt sich schreiben als $\varphi = \frac{1}{2}(\chi+\bar{\chi})$. Damit ist $\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial z}(\chi+\bar{\chi}) = -\frac{\partial\chi}{\partial z}-\frac{\partial\bar{\chi}}{\partial z}$. Wenn χ nur von z und nicht von $\bar{z}$ abhängt, so ist $\partial_z\bar{\chi} = 0$ und

$$\bar{E} = -\frac{\partial\chi}{\partial z}.$$

d) Für die Oberflächenladungsdichte ω gilt $\omega = |\vec{D}|$. Da die Oberfläche eine Fläche konstanten Potentials ist, gilt mit b)

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}|_{\varphi=1}, \text{und } \omega = \epsilon_0|\vec{E}||_{\varphi=1}.$$

Man berechnet $|\vec{E}|$ aus $\chi = \sqrt{z}$ und $\bar{E} = -\frac{\partial\chi}{\partial z} = \frac{-1}{2\sqrt{z}}$. Daraus folgt $|E| = |\frac{1}{2\sqrt{z}}|$ und $\omega = \epsilon\left|\frac{1}{2\sqrt{z}}\right|$. Bei $\varphi = 1$ ist $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ und $z = x + iy = \left(1 + i\frac{y}{2}\right)^2$. Dies führt auf

$$\omega = \epsilon_0\left|\frac{1}{2+iy}\right| = \epsilon_0\frac{1}{\sqrt{4+y^2}} = \epsilon_0\frac{1}{\sqrt{8-4x}}.$$

Aufgabe 4)

a) Im 1. Schritt werden die Maschengleichungen aufgestellt. Eine mögliche Wahl ist

$$\begin{aligned} -i\omega L\hat{I}_1 - \frac{\hat{I}_1 - \hat{I}_2}{i\omega C} &= 0\ , & (1)\\ -\frac{\hat{I}_2 - \hat{I}_1}{i\omega C} - \frac{\hat{I}_2}{i\omega C'} - \frac{\hat{I}_2 - \hat{I}_3}{i\omega C} &= 0\ , & (2)\\ -\frac{\hat{I}_3 - \hat{I}_2}{i\omega C} - i\omega L\hat{I}_3 &= 0\ . & (3) \end{aligned}$$

Aus (1) findet man $\hat{I}_2 = \hat{I}_1(1 - \omega^2 LC)$ und aus (3) findet man $\hat{I}_2 = \hat{I}_3(1 - \omega^2 LC)$. Es gibt daher 2 Fälle,

$$\begin{aligned} &a) \qquad \omega^2 = \frac{1}{LC} = \omega_a^2 \text{ und } \ \hat{I}_2 = 0 \text{ oder}\\ &b) \qquad \hat{I}_1 = \hat{I}_3\ . \end{aligned}$$

Für den Fall b) erhält man aus (2)

$$\frac{2}{C}(\hat{I}_1 - \hat{I}_2) - \frac{\hat{I}_2}{C'} = 0.$$

Nun setzen wir $\hat{I}_2 = \hat{I}_1(1 - \omega^2 LC)$ ein und erhalten

$$2\frac{C'}{C}\omega^2 LC - (1 - \omega^2 LC) = 0.$$

Dies führt auf

$$\omega^2 = \frac{1}{LC(1 + 2\frac{C'}{C})} = \omega_b^2.$$

Zusammengefaßt ergibt das die folgenden beiden Lösungen:

$$\begin{array}{lrcl} \text{Fall a)} & I_1 & = & Re\{\hat{I}_1 e^{-i\omega_a t}\} = -I_3 \ , \\ \text{Fall b)} & I_1 & = & Re\{\hat{I}_1 e^{-i\omega_b t}\} = I_3 \ . \end{array}$$

b) Für die Linearkombination der beiden Lösungen schreibt man

$$\begin{aligned} I_1 &= Re\{Ae^{-i\omega_a t} + Be^{-i\omega_b t}\} \ , \\ I_3 &= Re\{-Ae^{-i\omega_a t} + Be^{-i\omega_b t}\} \ . \end{aligned}$$

Jetzt müssen die Anfangsbedingungen eingesetzt werden

$$I_1(0) = I_3(0) = 0 \Rightarrow Re\{A + B\} = Re\{B - A\} = 0$$

Damit ergibt sich $\text{Re}\{A\} = \text{Re}\{B\} = 0$ und $A = ia$ und $B = ib$ für a, b reell. Die noch verbliebenen Anfangsbedingungen sorgen für

$$\dot{I}_3(0) = 0 \Rightarrow Re\{-a\omega_a + b\omega_b\} = 0 \Rightarrow \omega_b b = \omega_a a \ ,$$

$$\dot{I}_3(0) = \dot{I}_0 \Rightarrow a\omega_a + b\omega_b = 2a\omega_a = \dot{I}_0 = 2b\omega_b \ .$$

Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{1}{2}\dot{I}_0 \text{Im}\{\frac{e^{-i\omega_a t}}{\omega_a} + \frac{e^{-i\omega_b t}}{\omega_b}\} \\ I_3 &= -\frac{1}{2}\dot{I}_0 \text{Im}\{-\frac{e^{-i\omega_a t}}{\omega_a} + \frac{e^{-i\omega_b t}}{\omega_b}\} \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, daß $\text{Re}\{iK\} = -\text{Im}\{K\}$.

Aufgabe 5

a) Das Dipolmoment berechnet sich aus folgendem Integral:

$$\vec{p} = \int \vec{r}\varrho(\vec{r})d^3r \ .$$

$p_x = A\int\int\int zxe^{-\frac{r}{a}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$ und $p_y = 0$, da der Integrand ungerade in x bzw. in y ist;

$$p_z = A\int\int\int z^2 e^{-\frac{r}{a}} d^3r = 2\pi A \int\limits_0^\infty \int\limits_{-1}^1 \cos^2\vartheta \mathrm{d}(\cos\vartheta) r^4 e^{-\frac{r}{a}} \mathrm{d}r \ .$$

Dabei ist $\int\limits_{-1}^1 \cos^2\vartheta \mathrm{d}(\cos\vartheta) = \frac{2}{3}$. Die Integration über r wird mit Hilfe der partiellen Integration durchgeführt,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^4 e^{-\frac{r}{a}} \mathrm{d}r &= a^5 \int_0^\infty \xi^4 e^{-\xi} \mathrm{d}\xi = a^5([\xi^4(-\xi)]_\infty^0 + \int_0^\infty 4\xi^3 e^{-\xi}\mathrm{d}\xi) \\ &= a^5([4\xi^3 e^{-\xi}]_\infty^0 + \int_0^\infty 12\xi^2 e^{-\xi}\mathrm{d}\xi) \\ &= a^5([12\xi^2 e^{-\xi}]_\infty^0 + \int_0^\infty 24\xi e^{-\xi}\mathrm{d}\xi) \\ &= a^5([24\xi e^{-\xi}]_\infty^0 + \int_0^\infty 24 e^{-\xi}\mathrm{d}\xi) = 24a^5 \end{aligned}$$

Für $\vec{p}$ ergibt sich daher $\vec{p} = 32\pi a^5 A\vec{e}_z$.

b) $Q = A\int\int\int ze^{-\frac{r}{a}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$, da der Integrand ungerade in z ist.

c) Die abgestrahlte Leistung beträgt $P = \frac{\mu}{6\pi c} < \ddot{\vec{p}}^2 >$. Mit $\vec{p} = 32\pi a^5 A\vec{e}_z$ und $A = A_0 \sin\omega t$ ergibt sich

$$\ddot{p} = -\omega^2 A_0 32\pi a^5 \sin(\omega t) \ .$$

Dies führt mit $< \sin(\omega t)^2 >= \frac{1}{2}$ auf

$$\bar{P} = \frac{\mu}{6\pi c}\frac{32^2\pi^2 a^{10}}{2}\omega^4 {A_0}^2 = \frac{\mu}{3c}16^2\pi a^{10} {A_0}^2\omega^4.$$