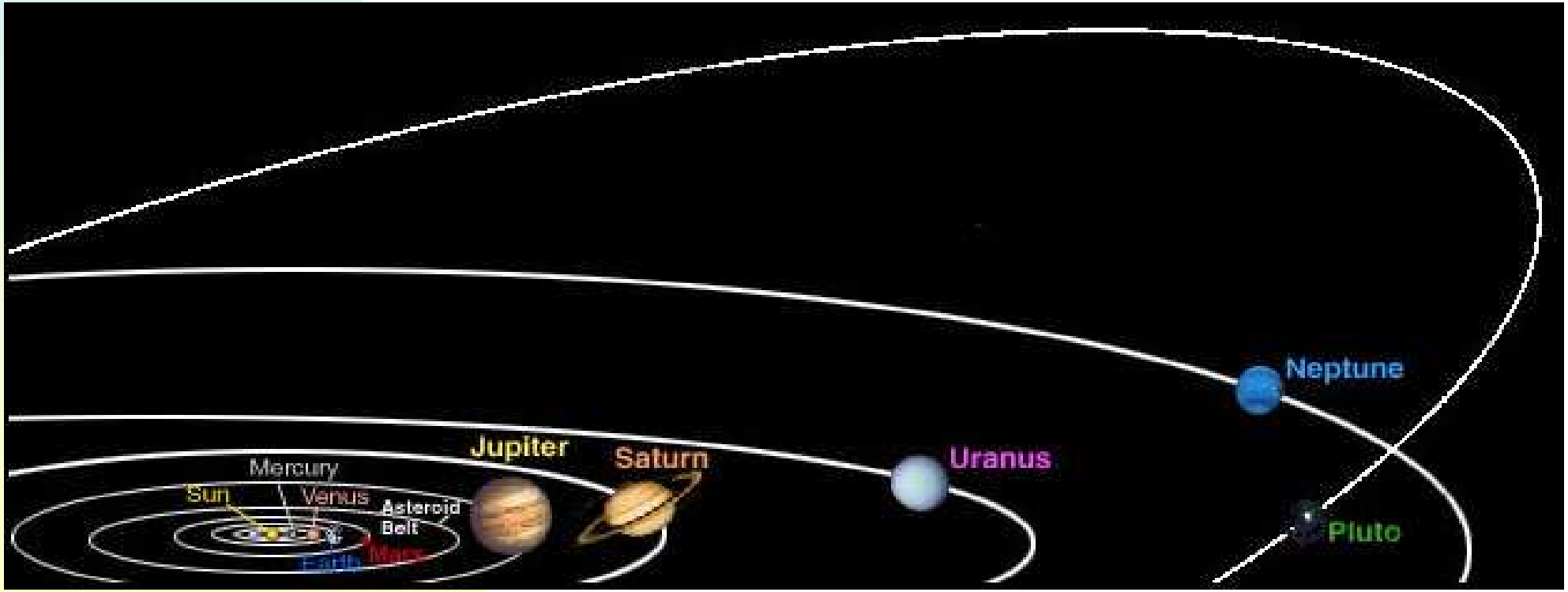
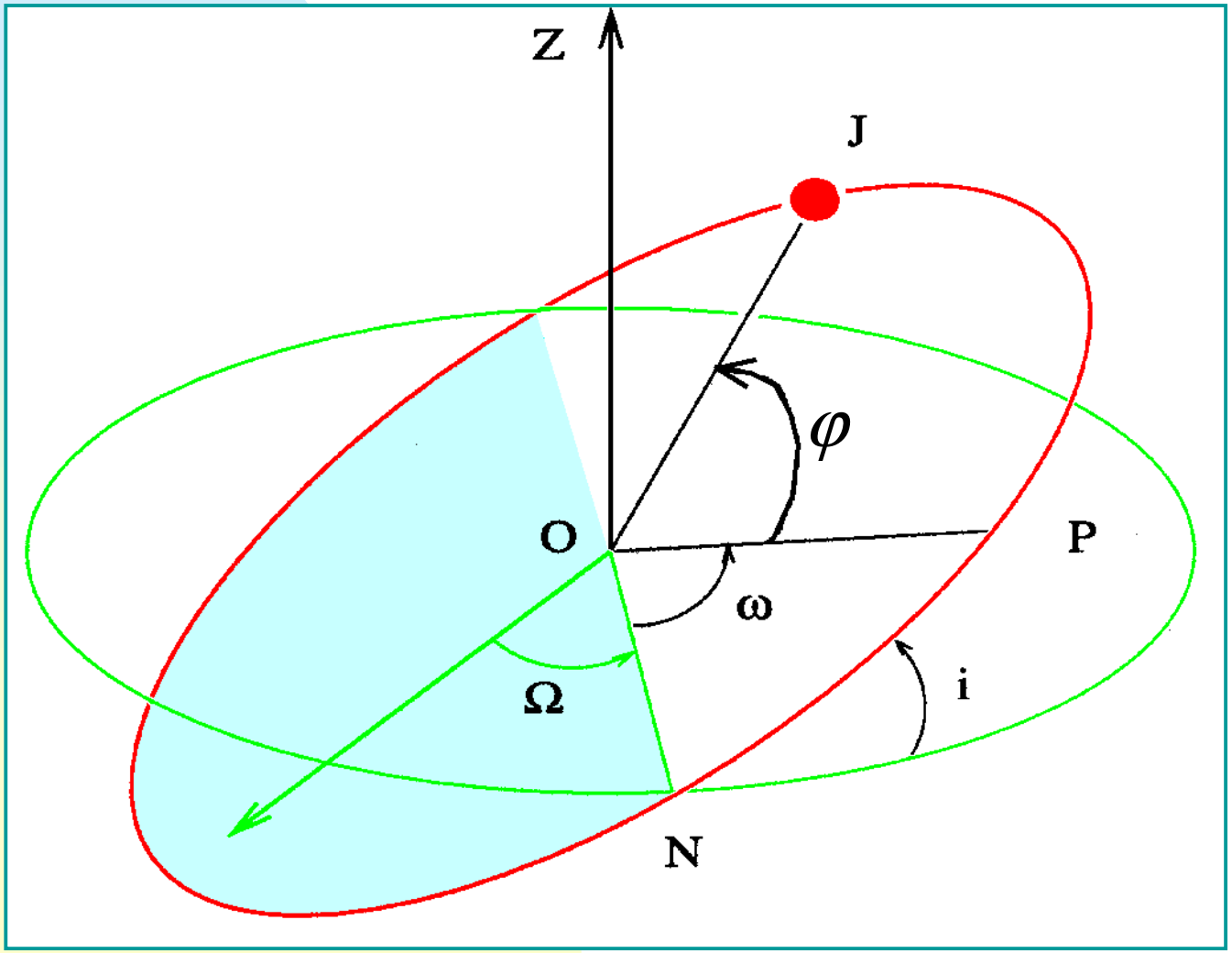
# Chaos oder Stabilität im Sonnensystem?

Georg Hoffstätter, 4. Oktober 2000



# Keplerbahnen

- Große Halbachse: a
- Exzentrizität: e
- Neigung: i




- Kanonisch konjugierte Variable
- $\vec{J} = (a,e,i)$
- $\vec{\Theta} = (\varphi, \Omega + \omega, \Omega)$
- Basis für Störungstheorie in e und i

# Stabilität der Planetenbahnen

- Kepler (1609-1618): Planetenbahnen sind stabile Ellipsen.
- Newton (1687): Planeten beeinflussen sich: Instabilität.
- Halley (c.a.1700): Vergleich mit chaldäischen Beobachtungen (von Ptolemäus übermittelt).

→ Jupiter und Saturn bewegen sich aufeinander zu.

- Laplace (1785): Linearisierung in e und i entkoppelt e und i

→ Drehimpulserhaltung liefert Beschränkung für e und i.

- Poincaré (1892-1899): Sonnensystem ist nicht integrierbar.
- Arnold (1963): Stabilitätsgarantie für $m, e, i < 10^{-43}$
- Cohen (1973):Anfang von numerischer Langzeitsimulation

# Probleme der Störungstheorie

- Setzt quasiperiodische Bewegung voraus

$$\vec{z}(t) = \sum_{\vec{k}} \vec{z}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{\omega}(\vec{J})\cdot t}$$

- Bei der Lösung entstehen kleine Resonanznenner
- Die benötigten Reihen werden sehr aufwendig: 150000 Glieder bei 2ter Ordnung in masse, 5ter in e, i.
- Poincaré konnte die Divergenz der Lösungsreihe nachweisen.

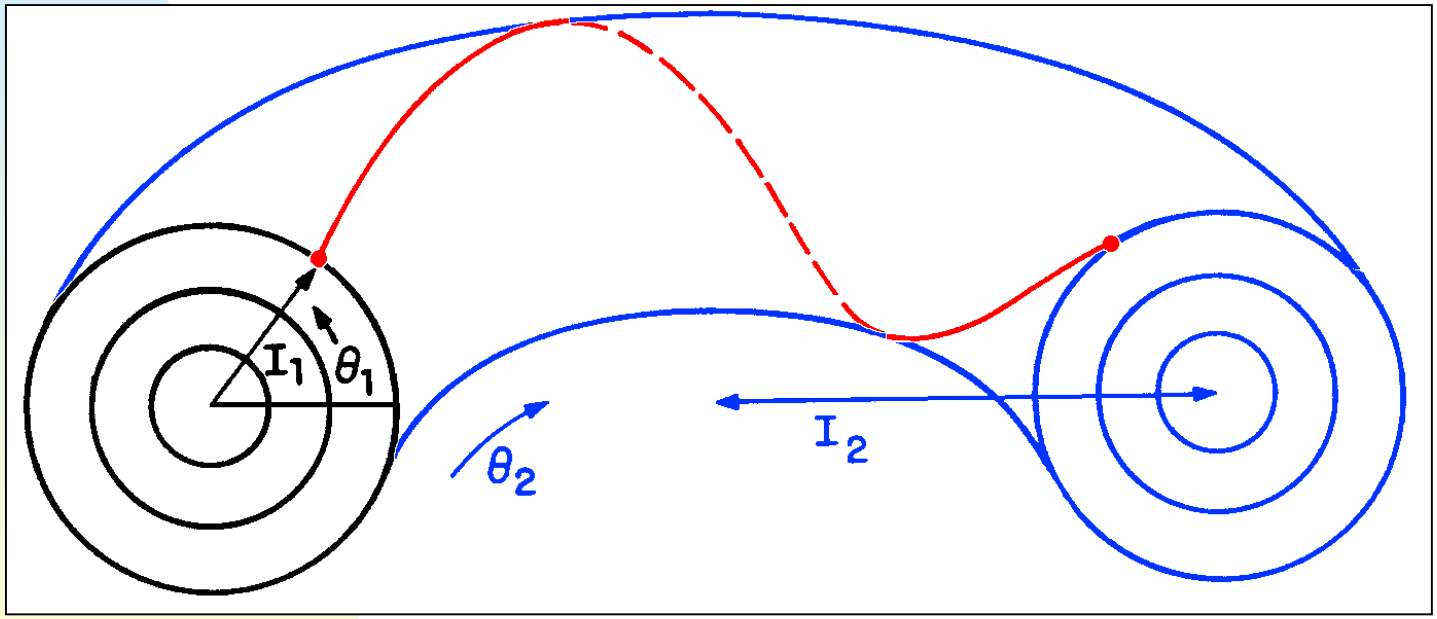
# Was bewegt sich im Sonnensystem

- Eigendrehung der Monde und der Planeten
- Bewegung der Asteroiden (Meteoriten)
- Kuiper Gürtel und Kometen mit kurzer Periode
- Fortschreiten des Umlaufwinkels von Planeten
- Veränderung der Exzentrizitäten und der Steigungen

Gibt es dabei chaotische Bewegungen ?

# Der Poincaré Schnitt

- 4D integrable Hamiltonsche Bewegung in Winkel-Wirkungs-Variablen
- $I_1(t)=I_1(0)$, $\Theta_1=\omega_1 t+\Theta_1(0)$, $I_2(t)=I_2(0)$, $\Theta_2=\omega_2 t+\Theta_2(0)$

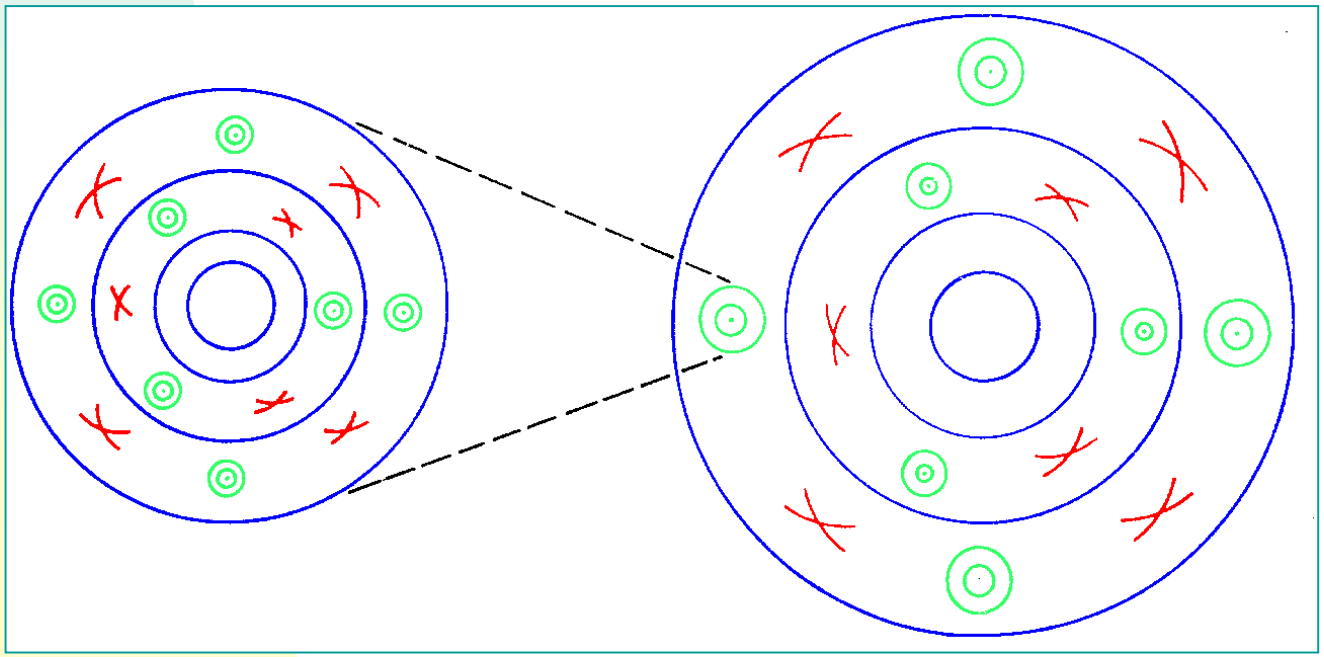



- Reduktion auf 2D im Poincaré Schnitt mit Phasenvorschub $\omega_1/\omega_2$ pro Umlauf.

# Kleine Störungen der Bewegung

- Resonanzen mit $\omega_1/\omega_2=n/m$ führen zu m stabilen und m instabilen Fixpunkten (Poincaré-Birkhof Theorem).

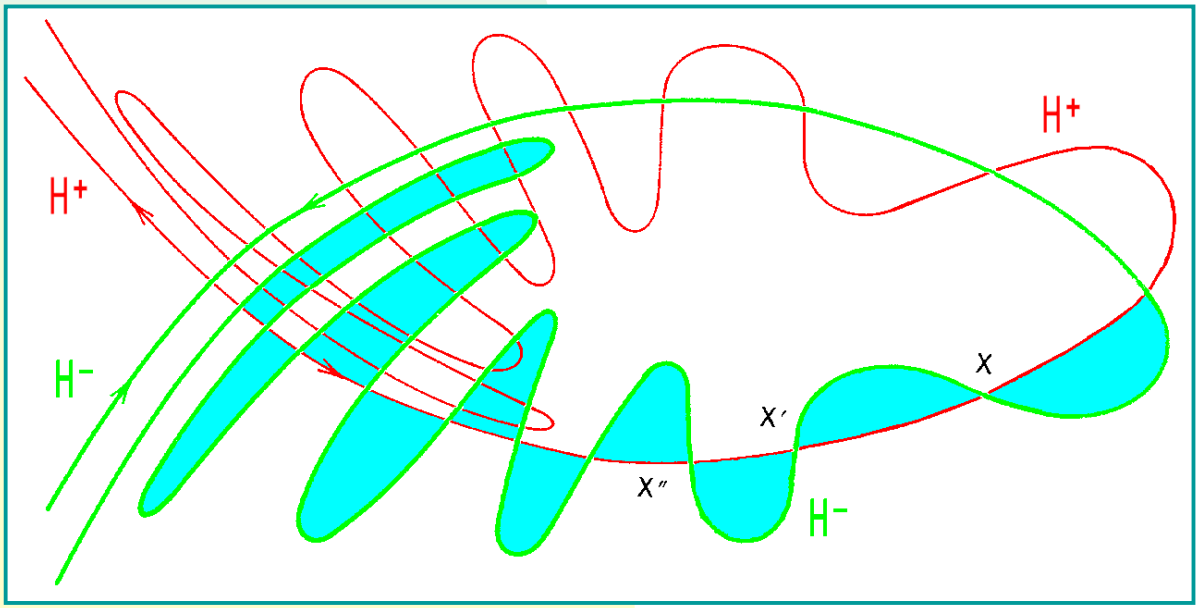
- Für $\omega_1/\omega_2$ die sich nicht gut approximieren lassen bleiben die Tori erhalten (KAM Theorem)

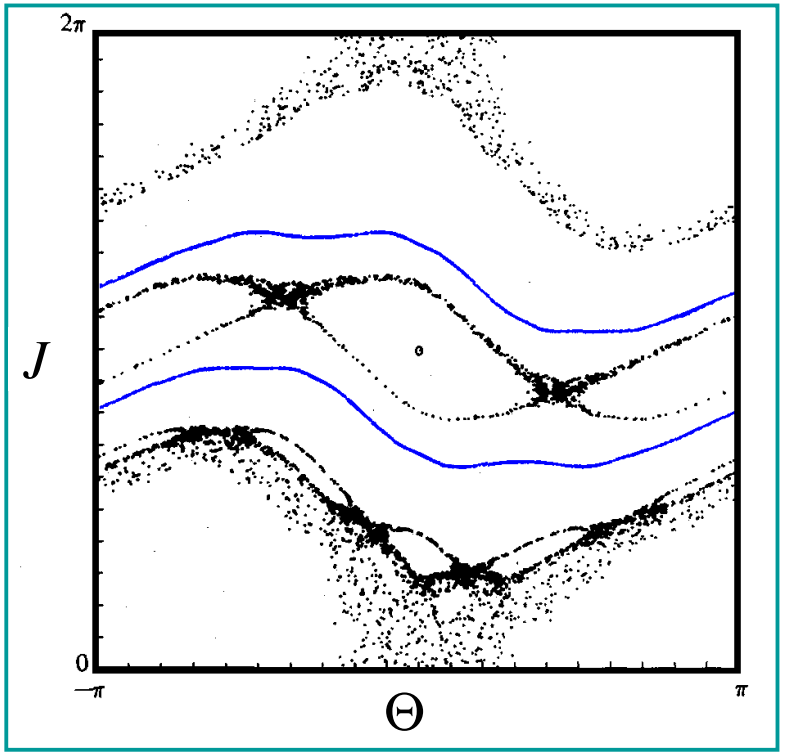


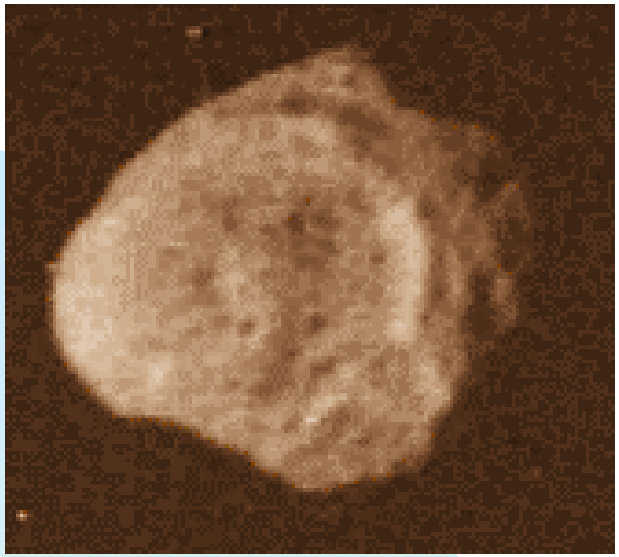
# Homokline Punkte

- Bei instabilen Fixpunkten gibt es eine stabile und eine instabile invariante Kurve.

- Schnittpunkte beider Kurven (Homokline Punkte) führen zu Chaos.



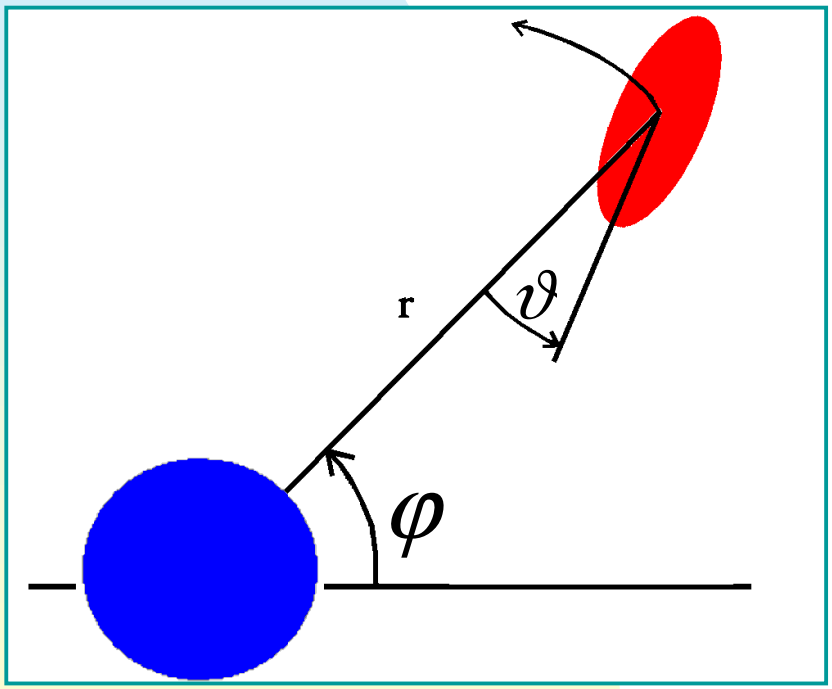


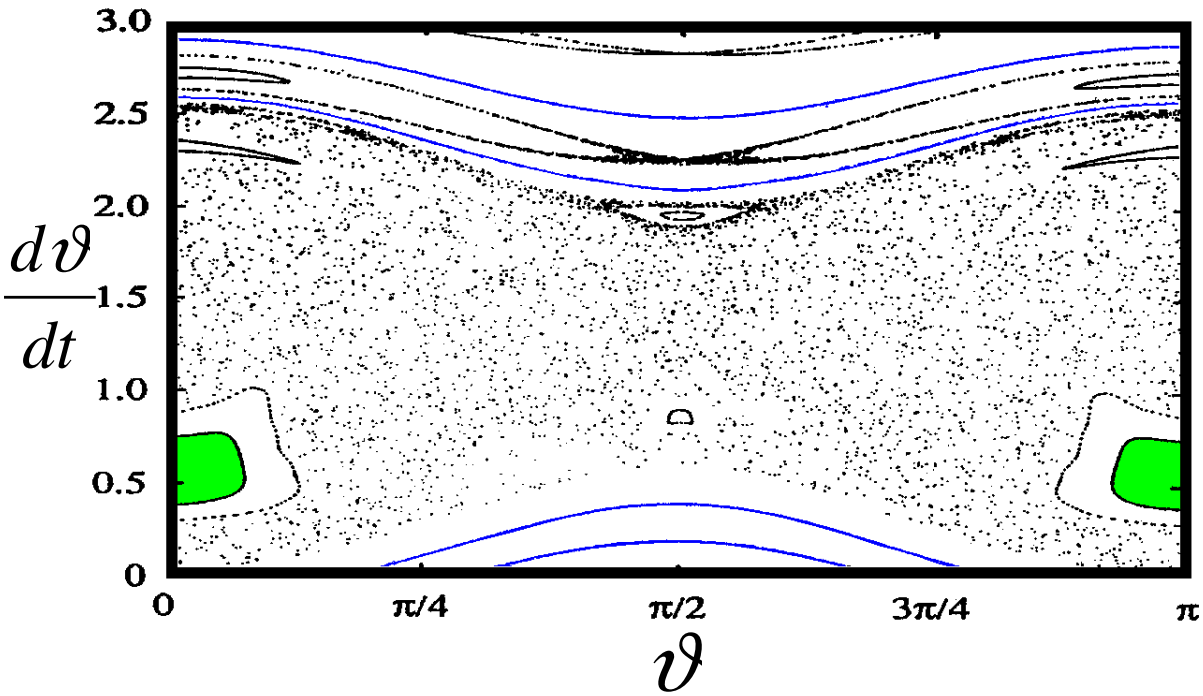
# Das Taumeln des Hyperion

- 250km X 115km X 110km ($\alpha$=3(B-A)/2C=0.4): Größtes unrundes Gebilde im Sonnensystem
- Einmalig durch großes $\alpha$ und e=0.1
- Eine Rotationsachse in Nähe der Bahnebene wurde von Voyager2 beobachtet: Keine Spin-Bahn-Kopplung
- Helligkeitsschwankungen bestätigen chaotische Drehung
- Einziges beobachtetes Chaos im Sonnensystem

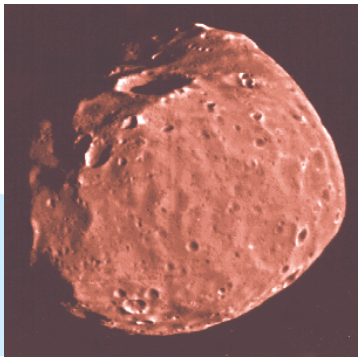
# Modelldrehung um die Vertikale

$$\frac{d^2(\vartheta+\varphi(t))}{dt^2} = -\alpha\left(\frac{a}{r(t)}\right)^3 \sin 2\vartheta$$

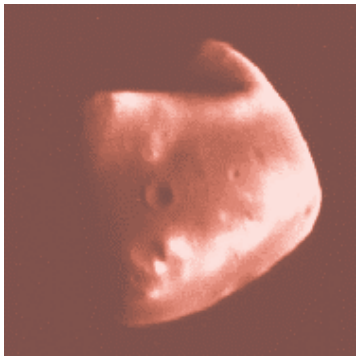


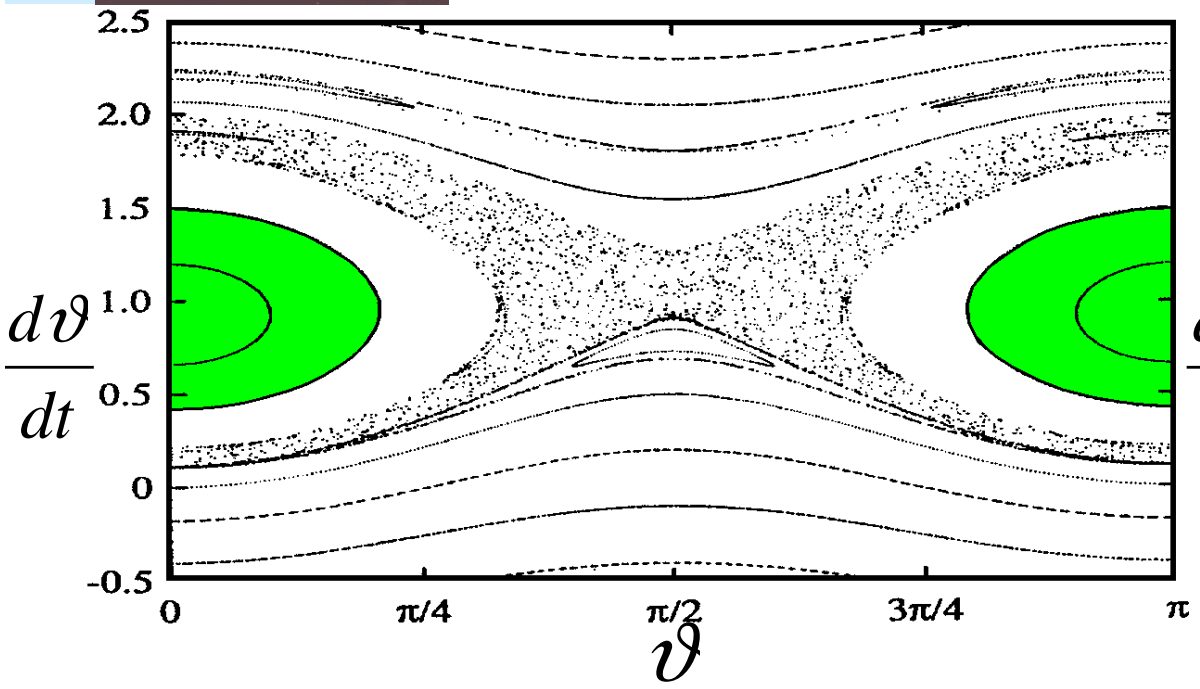



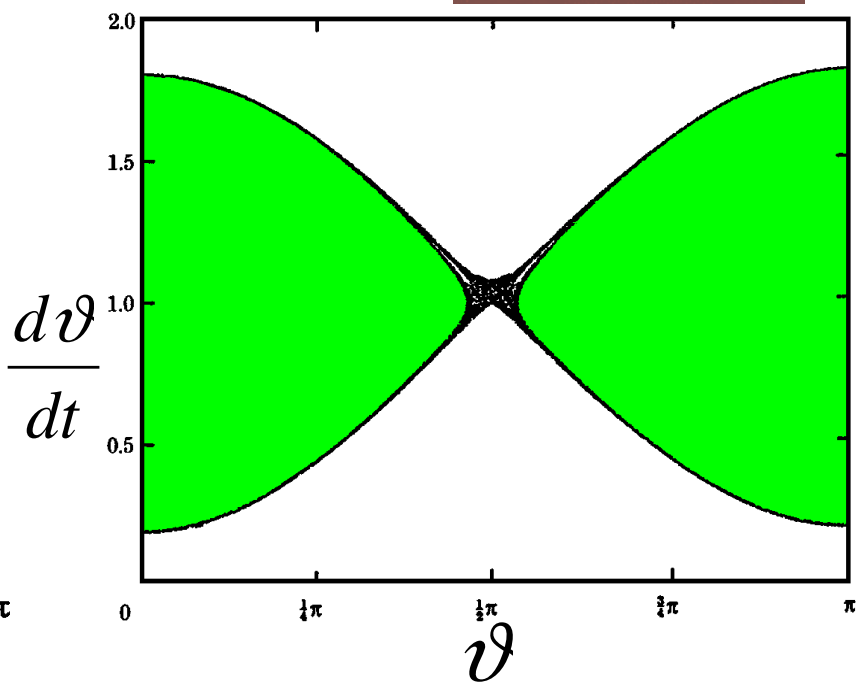

- Auf dem Weg von Rotation zu Libration um die Spin-Bahn-Kopplung liegt ein ausgeprägter chaotischer Bereich.



# Phobos und Deimos





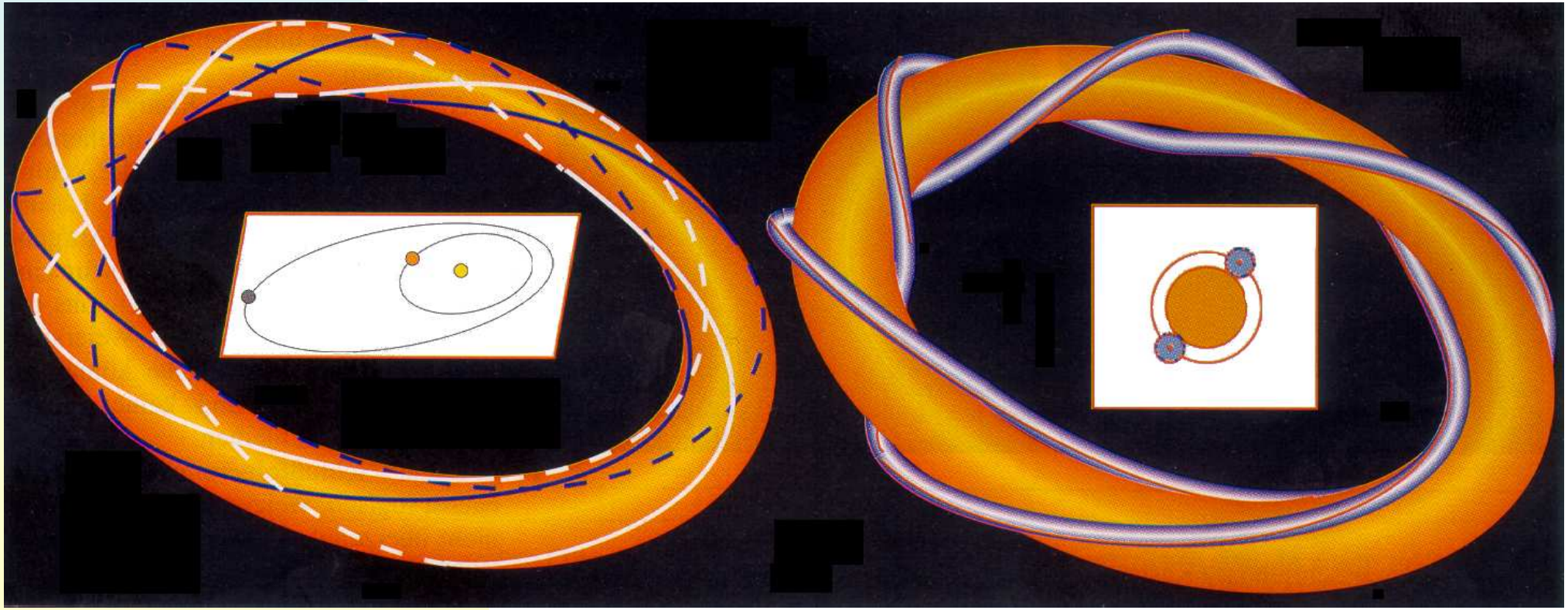




- Alle Monde waren vor Dämpfung in die Spin-Bahn-Resonanz chaotisch
- In den chaotischen Bereichen hatten alle Monde instabile Rotationsachsen

# Die Frequenzabbildung: $\vec{J} \Rightarrow \vec{\omega}(\vec{J})$

- Quasiperiodische Bewegung auf einem Torus hat diskrete Frequenzen $\omega_i$, die sich zeitlich nicht verändern.

$$\vec{z}(t) = \sum_{\vec{k}} \vec{z}_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{\omega}(\vec{J})\cdot t}$$

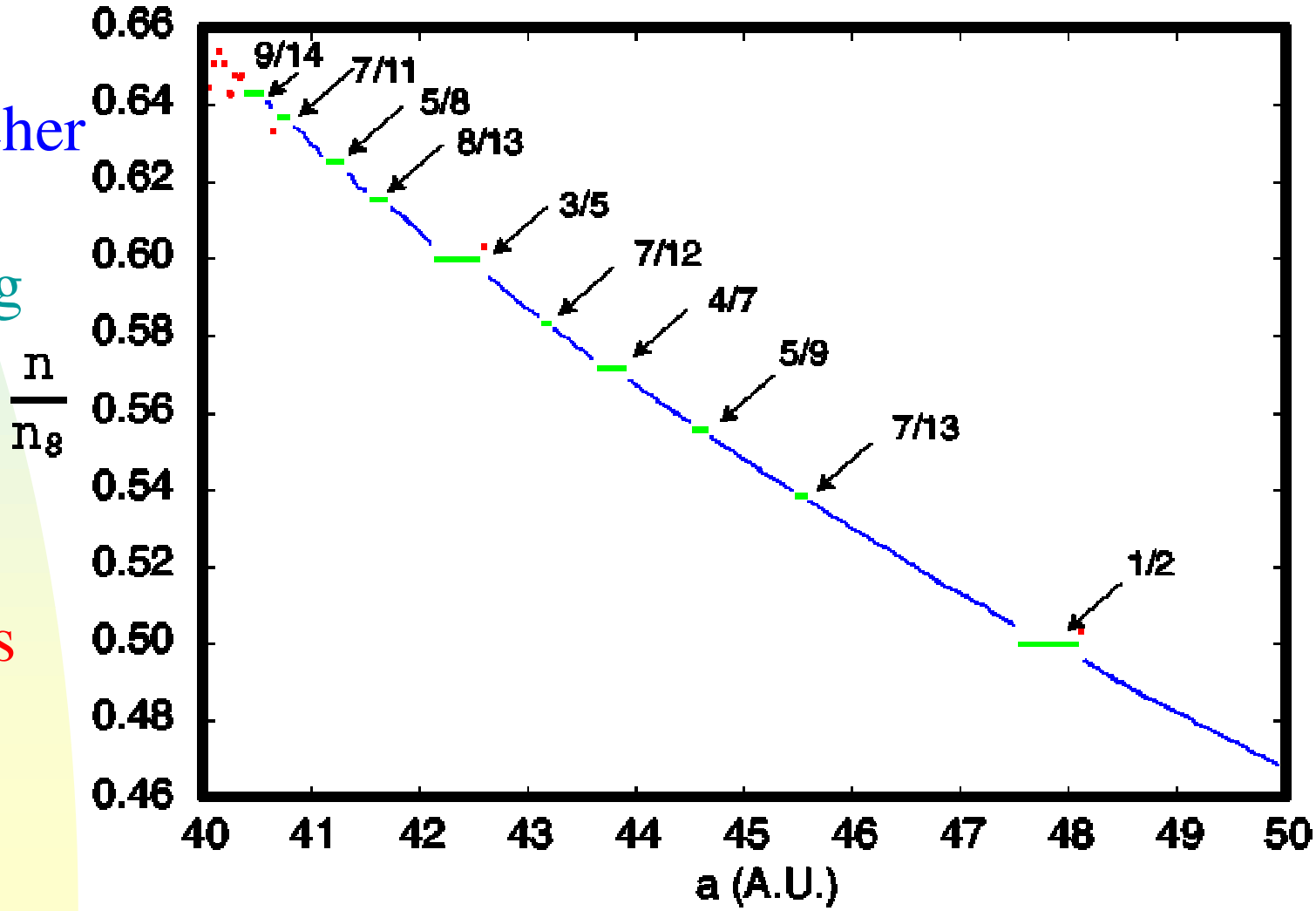


# Stetigkeit der Frequenzabbildung

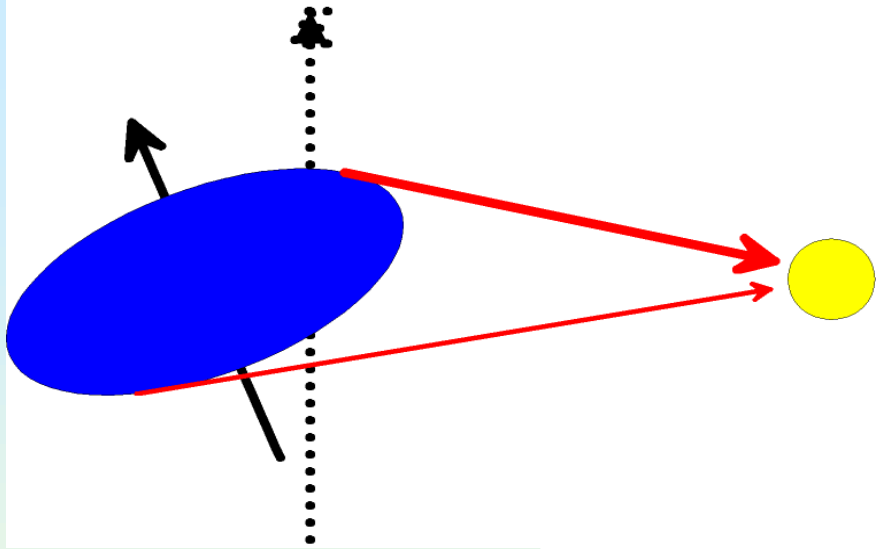
Bei quasiperiodischer Bewegung ist die Frequenzabbildung stetig

Nichtstetigkeit: Hinweis auf Chaos

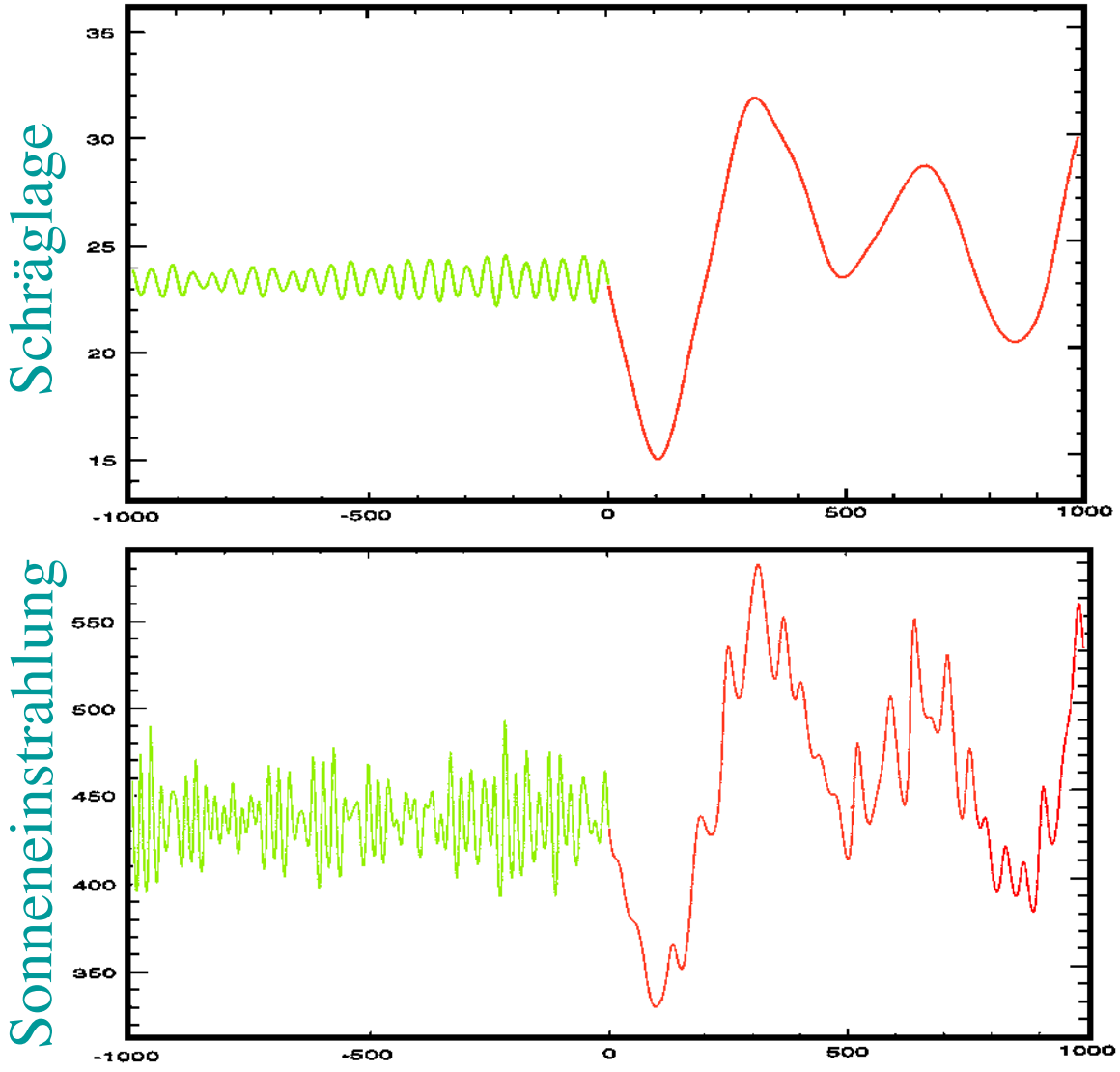
Bsp.: Resonanzen von Asteroiden mit Neptun



# Schräglage der Erde

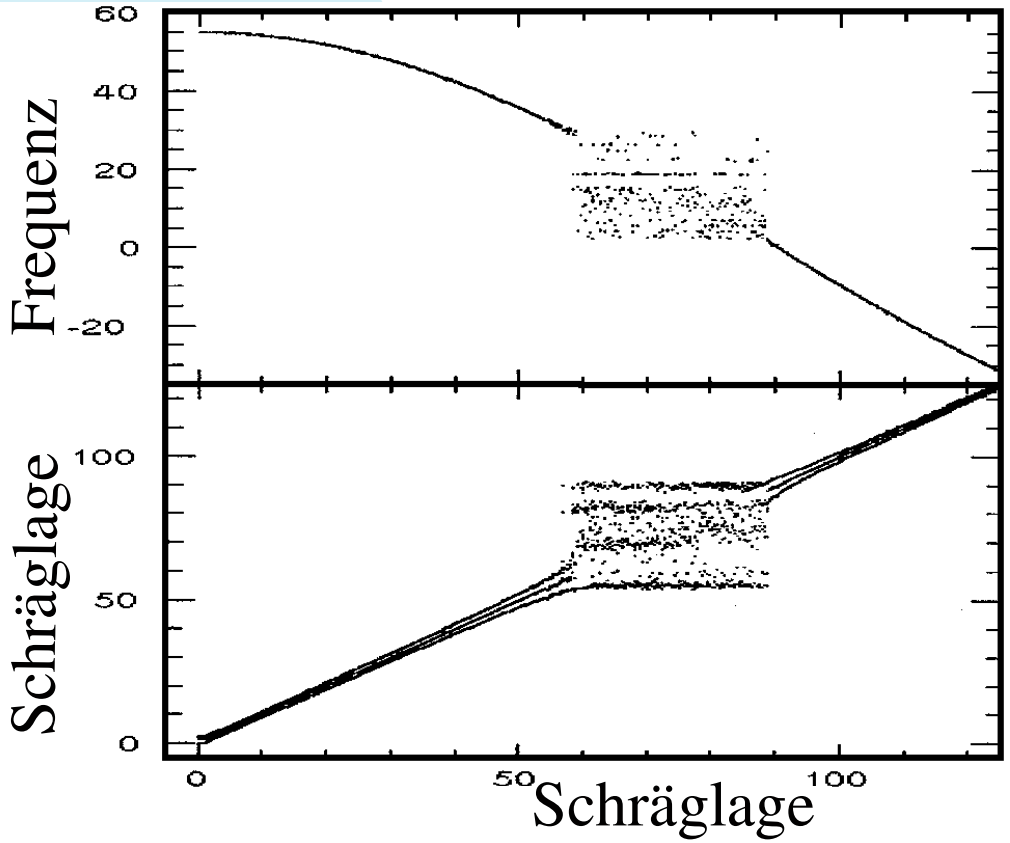


- Gezeitenkräfte von Mond und Sonne bewirken eine stabilisierende Präzession

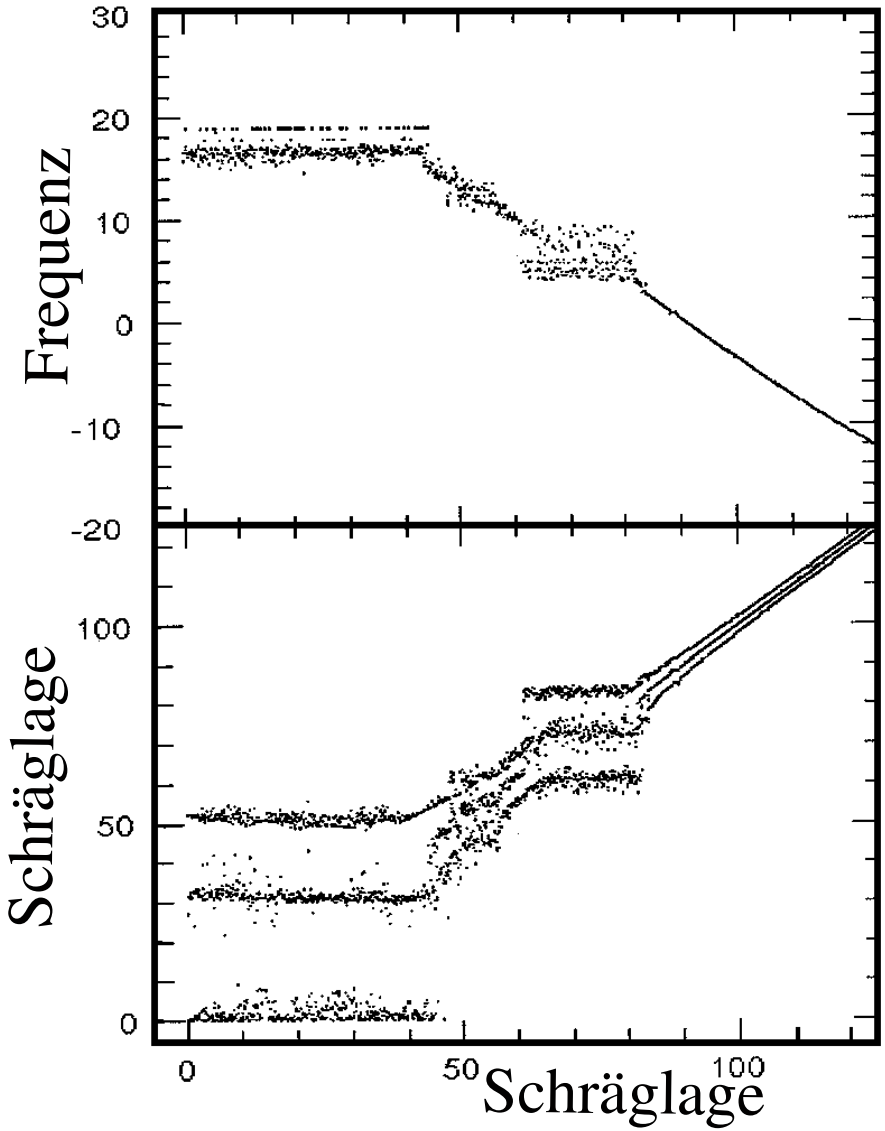


# Chaotische Schräglage der Erde

- Der Mond vermeidet die chaotische Bewegung um 23.5°.




Mit Mond

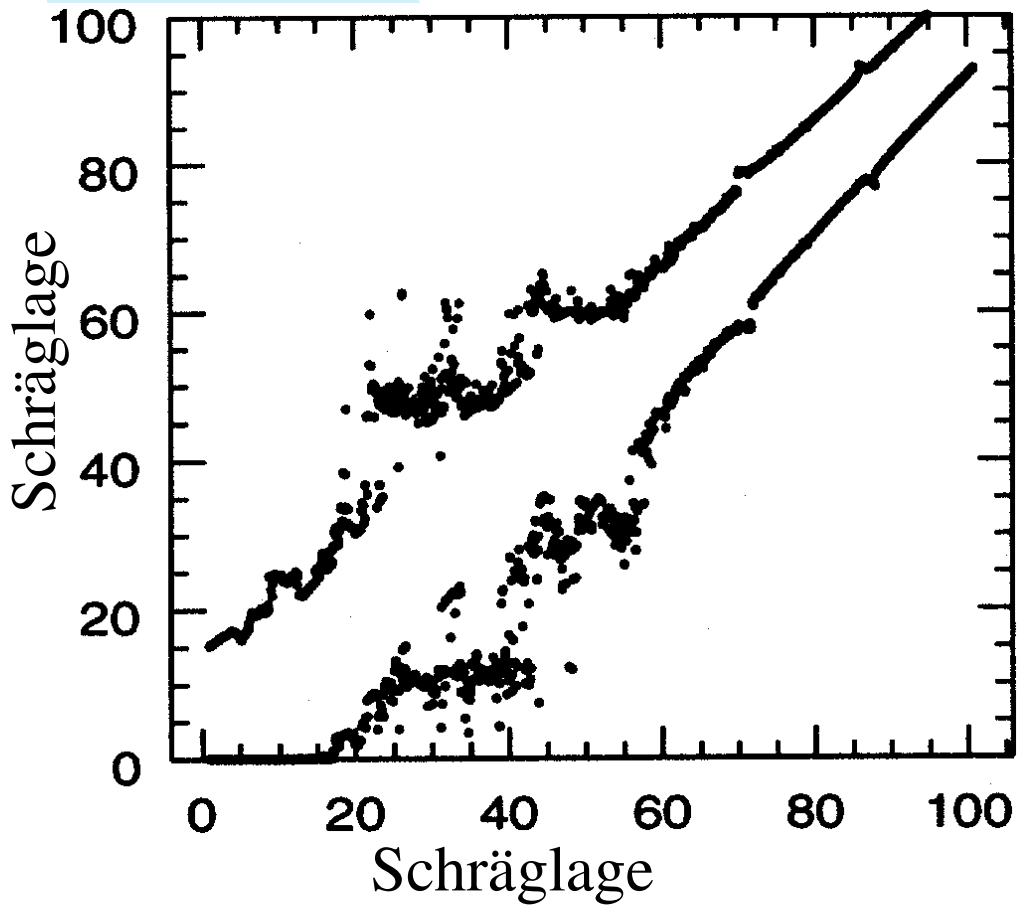



Ohne Mond

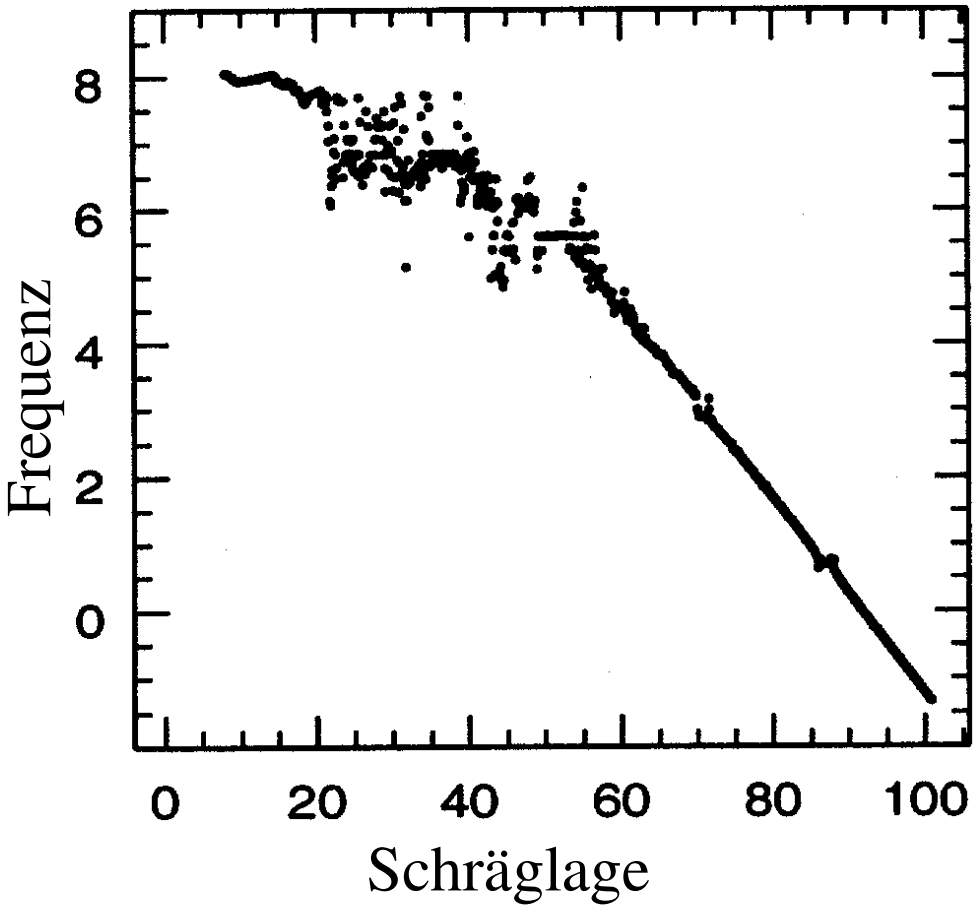
# Schräglage des Marses

- Die Drehachse des Mars schwankt chaotisch zwischen 0 und 60° in Ma Zeiten.

Schwankung der Schräglage



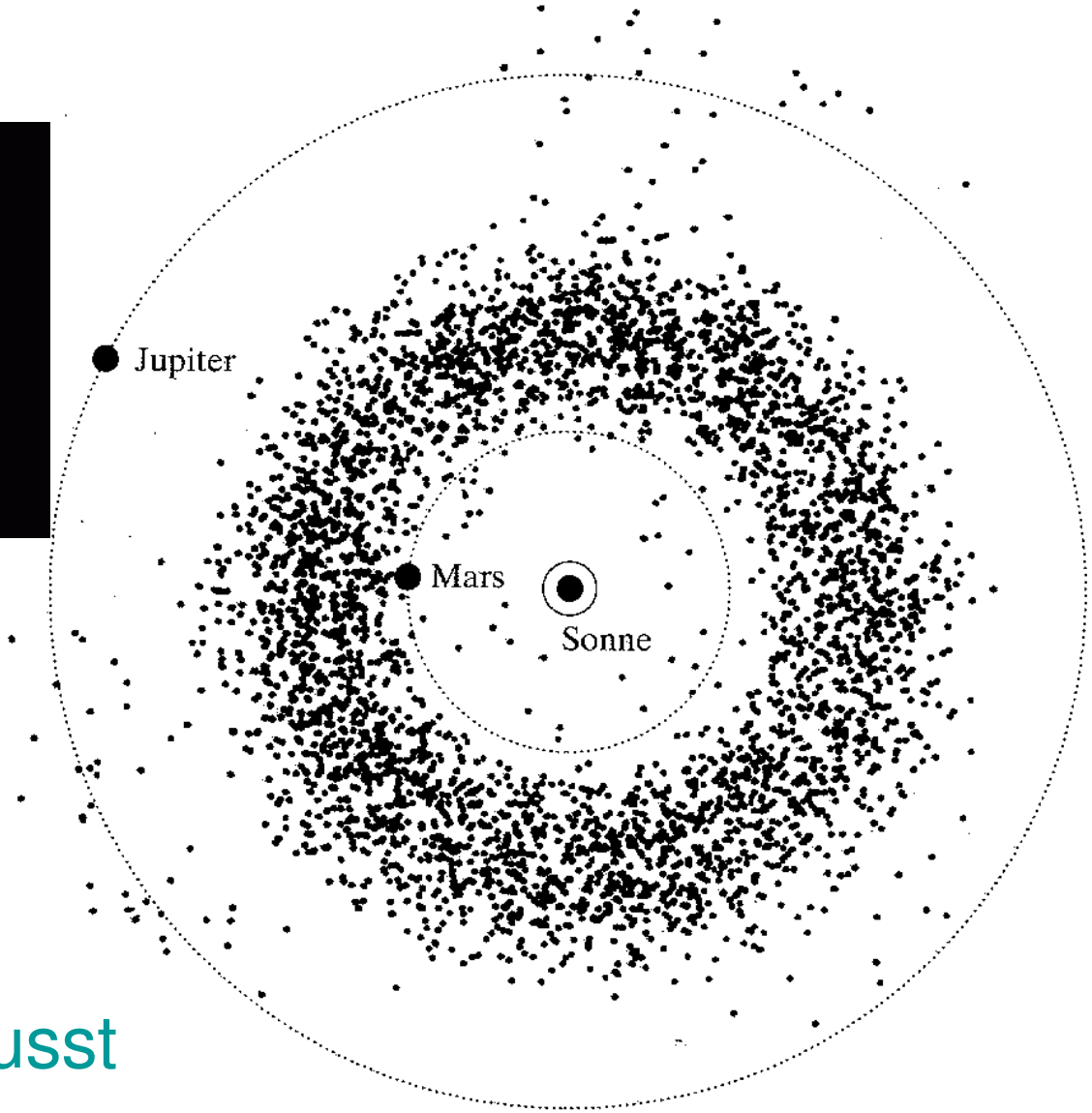

Frequenzabbildung



# Chaotisch Rotationsachsen im Sonnensystem

- Drehachse des Hyperion hat die einzige messbare chaotische Bewegung.
- Das Klima und die Atmosphäre des Mars schwanken enorm durch chaotische Bewegung der Drehachse.
- Das Klima der Erde wird durch den Mond stabilisiert.
- Die Ähnlichkeit der momentanen Schräglage von Erde und Mars sind zufällig und keine Randbedingung.
- Die inverse Rotation der Venus könnte durch Chaos verursacht sein.

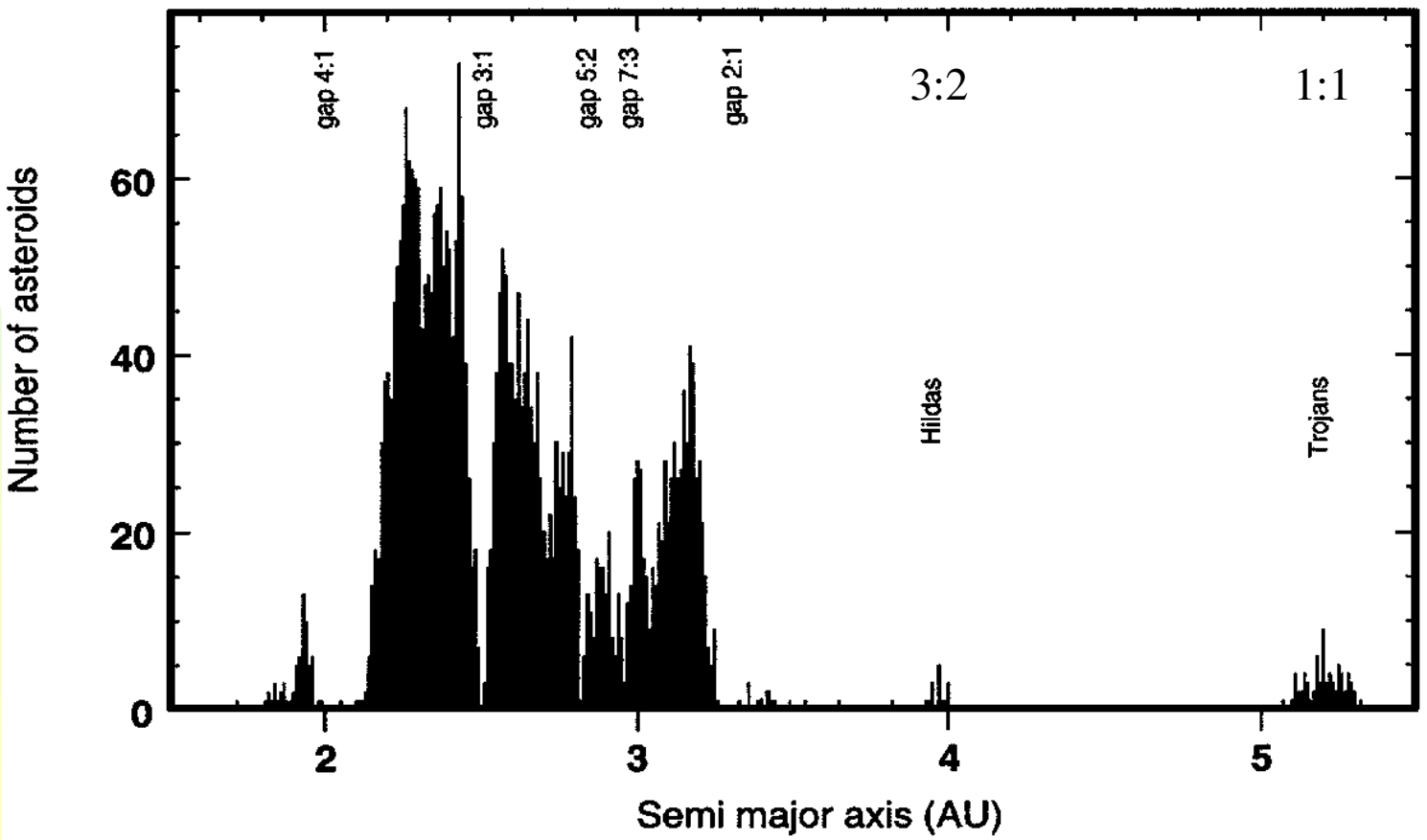
# Die Asteroiden




- 10m bis 40km
- Quelle von Meteoriten
- Stark von Jupiter beeinflusst

# Die Kirkwoodlücken

- Asteroiden sind ungleichmäßig verteilt
- Bei Resonanzen mit Jupiter finden sich teilweise Lücken und teilweise Anhäufungen

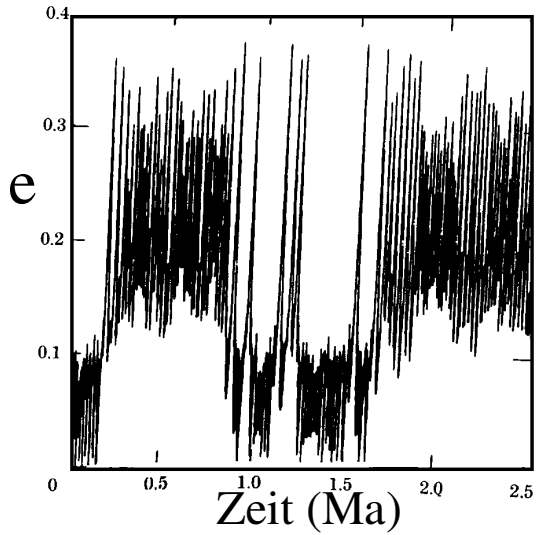


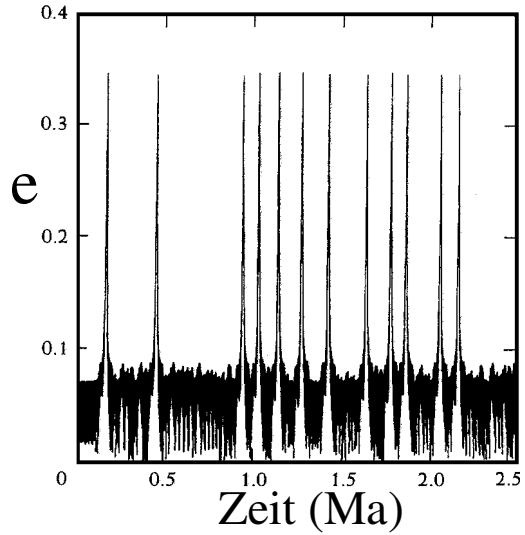
# Entvölkerung der 3:1 Lücke

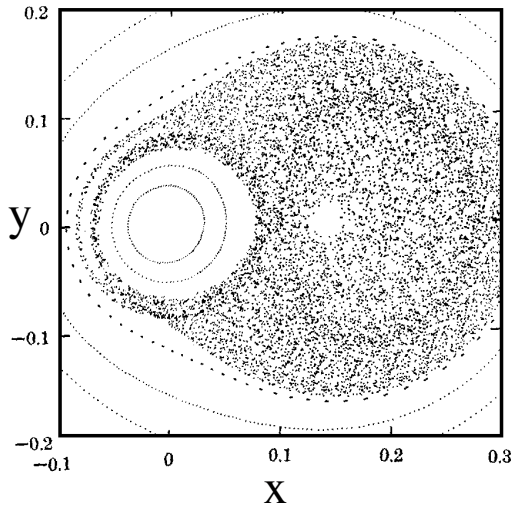
- Durch die Bewegung in chaotischen Bereichen können Asteroide nach k Jahren plötzlich große Exzentrizitäten erhalten

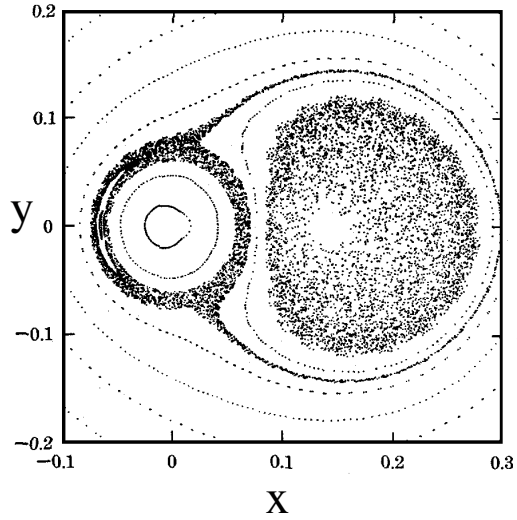
- Entvölkerung der 3:1 Lücke könnte eine Hauptquelle von Meteoriten sein

Zwei Bsp. eines Planaren (i=0) Modells



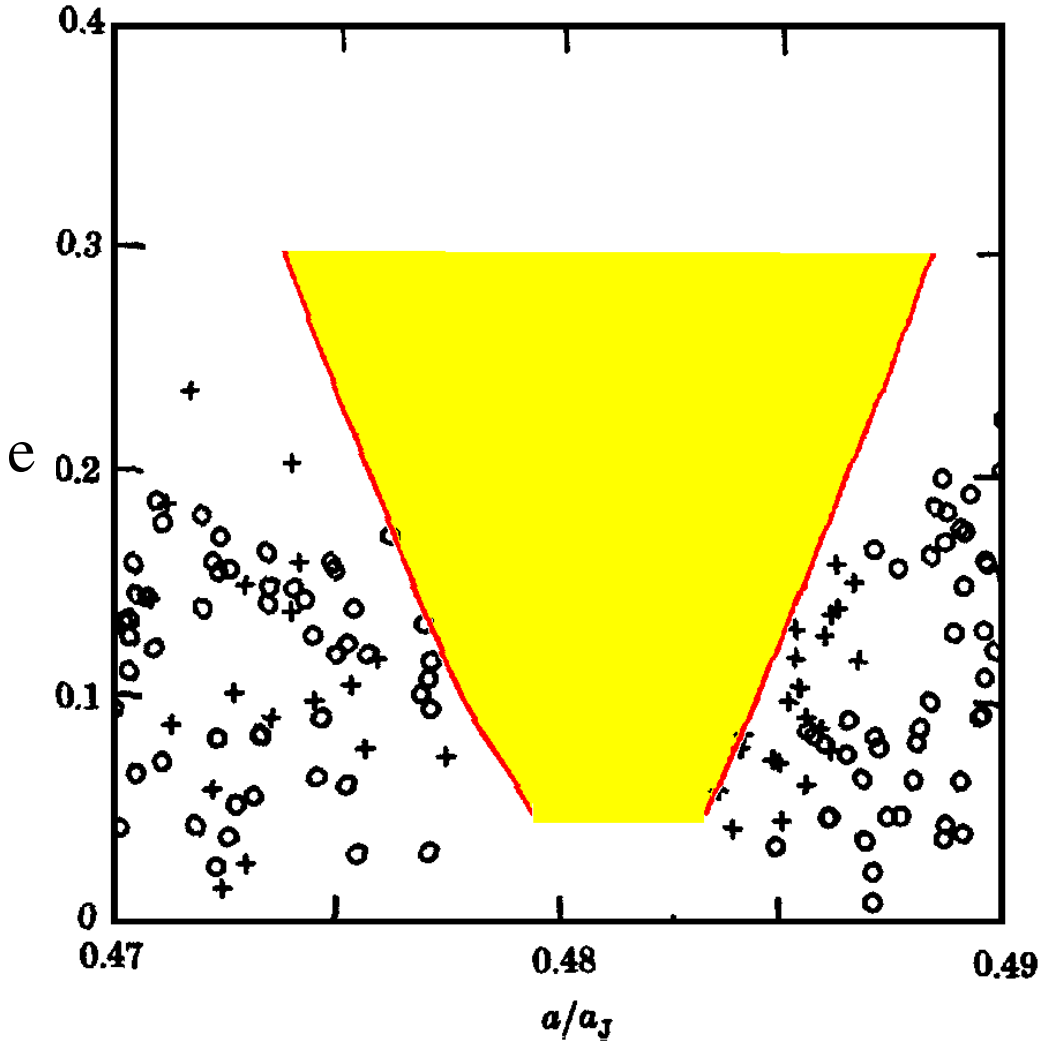



# Breite der 3:1 Lücke

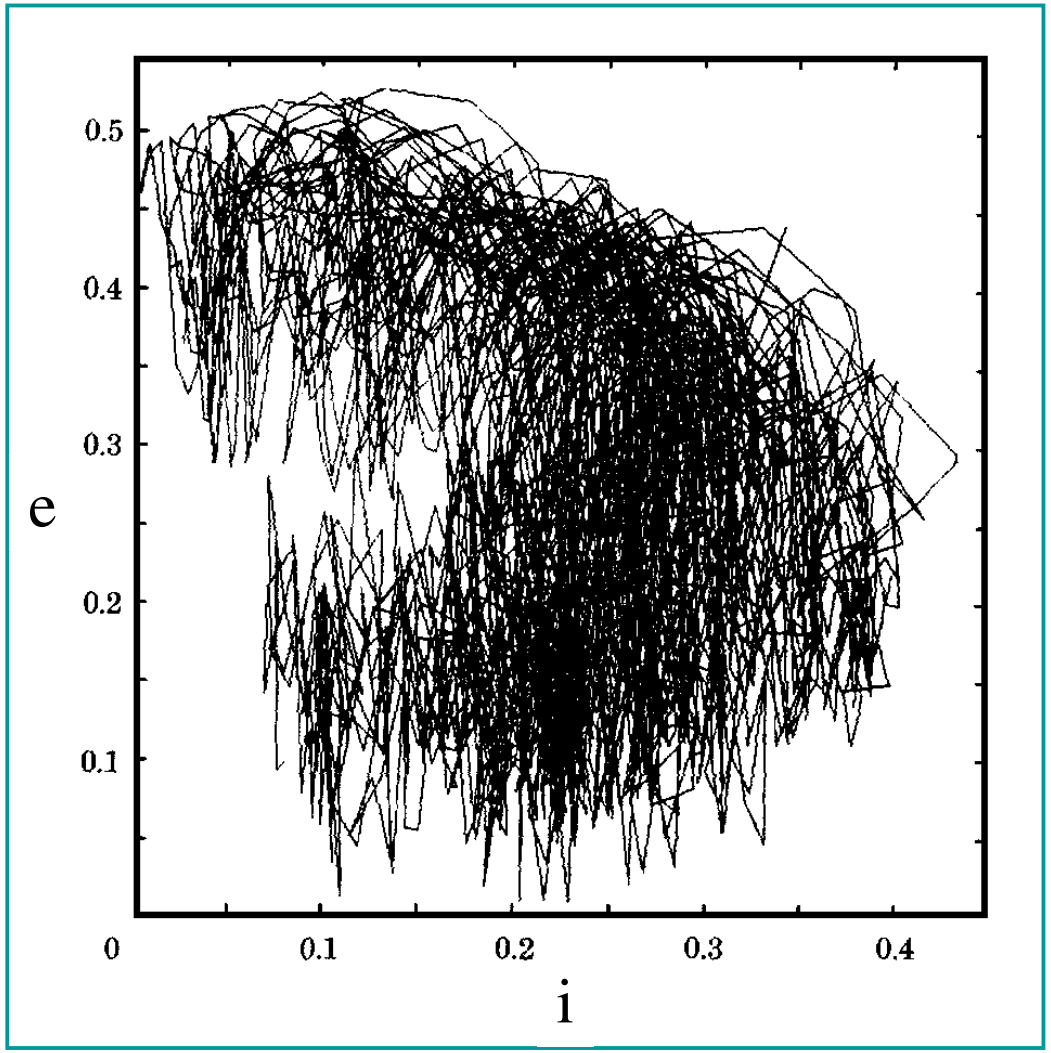
- In der Lücke liegen chaotische und quasiperiodische Trajektorien.  Alle kreuzen die Marsbahn.

Berechnete und Beobachtete Lücke



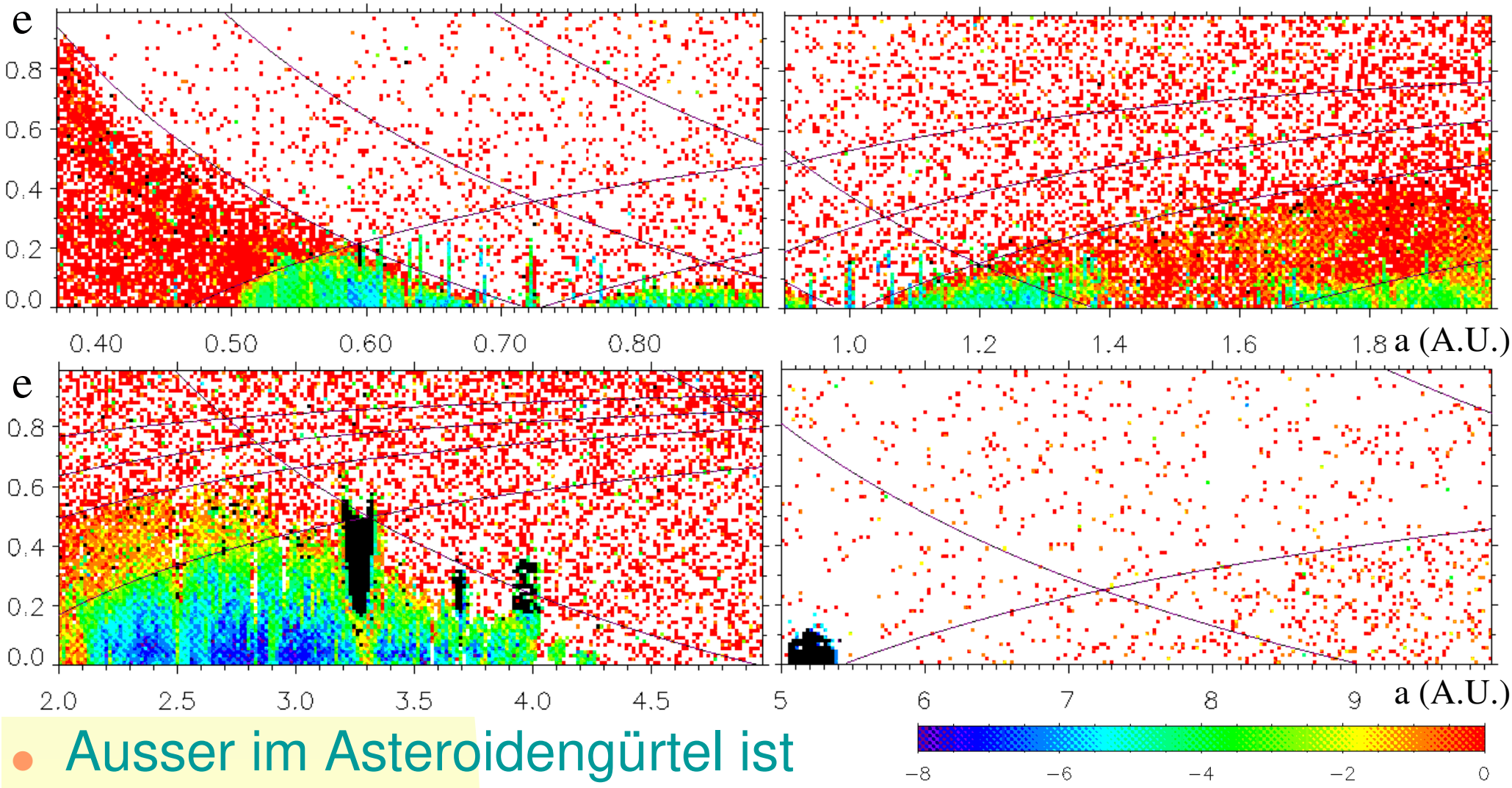
# Schwierigkeiten mit der 2:1 Lücke

- Planar Modelle führen nicht zu großen Exzentrizitäten und Asteroidenverlust.
- Vermutlich können große Exzentrizitäten nur mit Bahnneigungen erreicht werden.



# Frequenzabbildung für Asteroiden

## Zeitliche Veränderung der Frequenz in (a,e) für i=0




- Ausser im Asteroidengürtel ist kaum ein Bereich im inneren Sonnensystem nicht chaotisch.

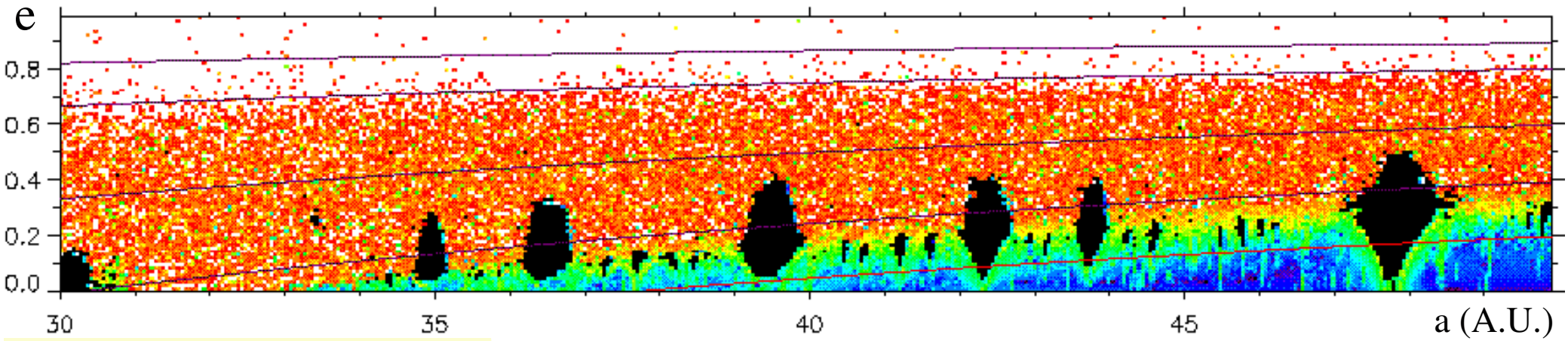
# Suche nach alten Planetoiden

- Kometen mit langer Periode sind isotrop verteilt

→ vermutlich aus der Oortschen Wolke (a>3000A.U.)

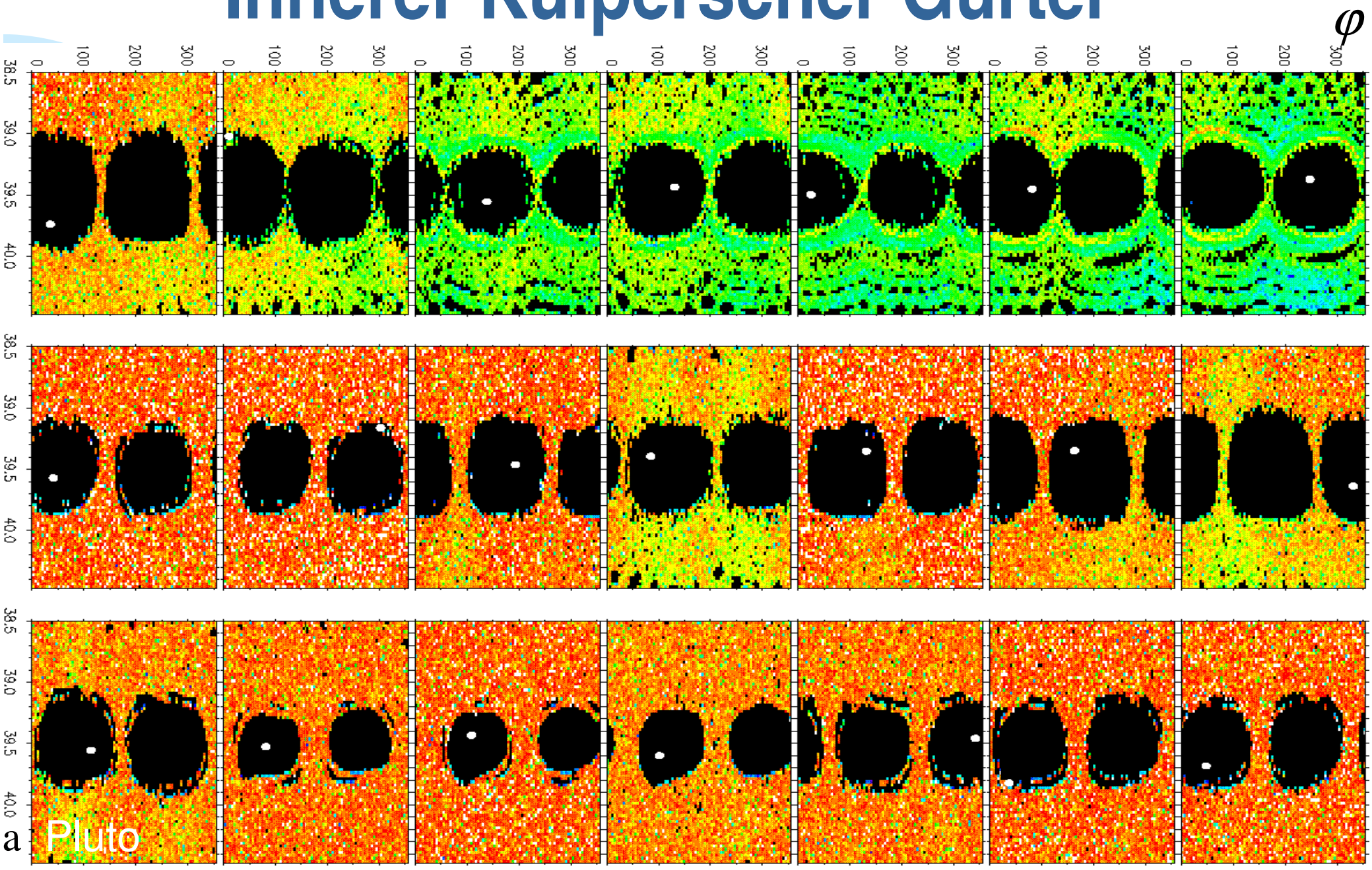
- Kometen mit kurzer Periode (<200a) sind hauptsächlich in der Planetenebene

→ aus dem Kuiperschen Gürtel: stabil ab a>35A.U.

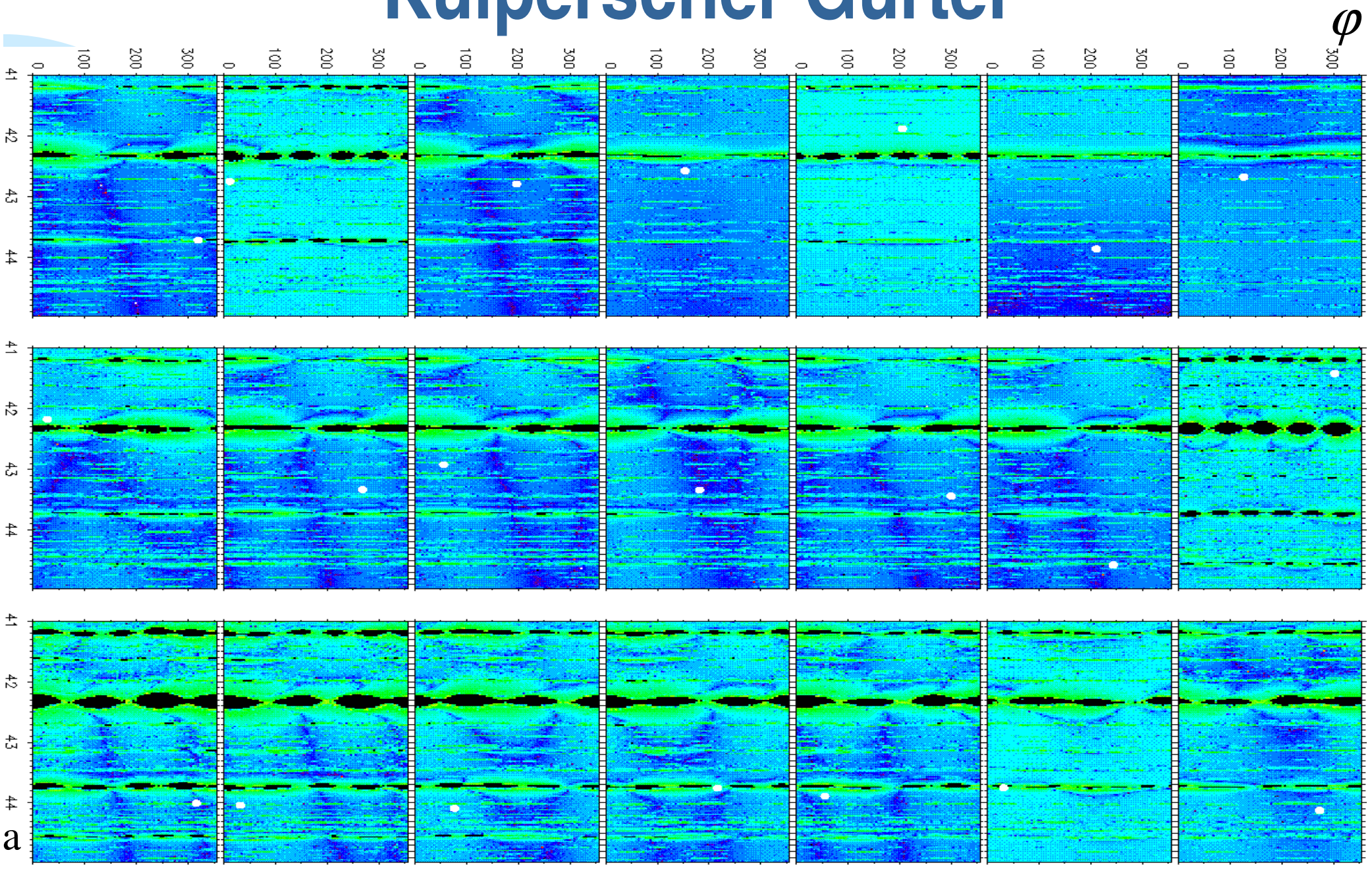



- Seit 1992 wurden dort zahlreiche Planetoide gefunden

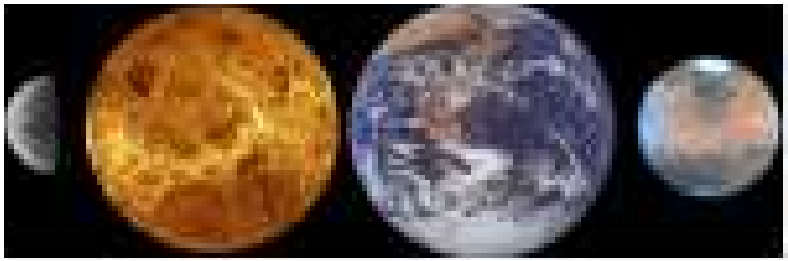
# Innerer Kuiperscher Gürtel



# Kuiperscher Gürtel

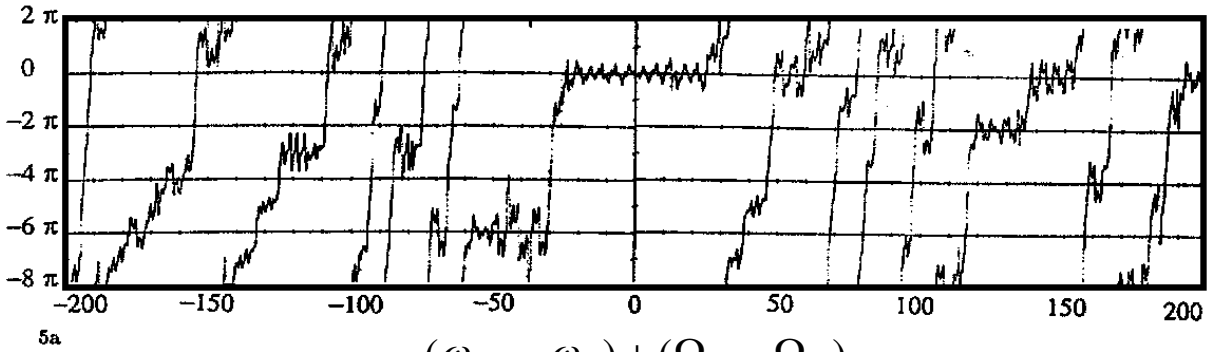


# Chaos um Resonanzen zwischen inneren Planeten

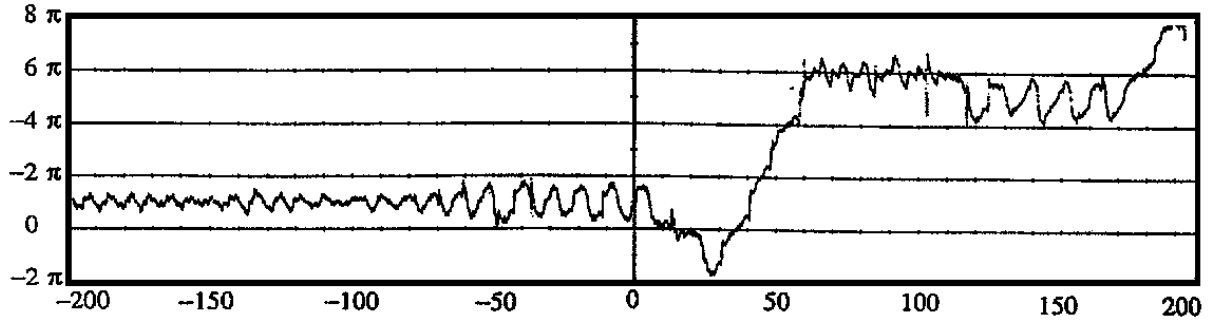


- Nach Mittelung über die schnelle Planetenrotation finden sich Langzeitresonanzen:

$$2(\omega_V - \omega_E) + (\Omega_V - \Omega_E)$$




$$(\omega_{Me} - \omega_J) + (\Omega_V - \Omega_J)$$

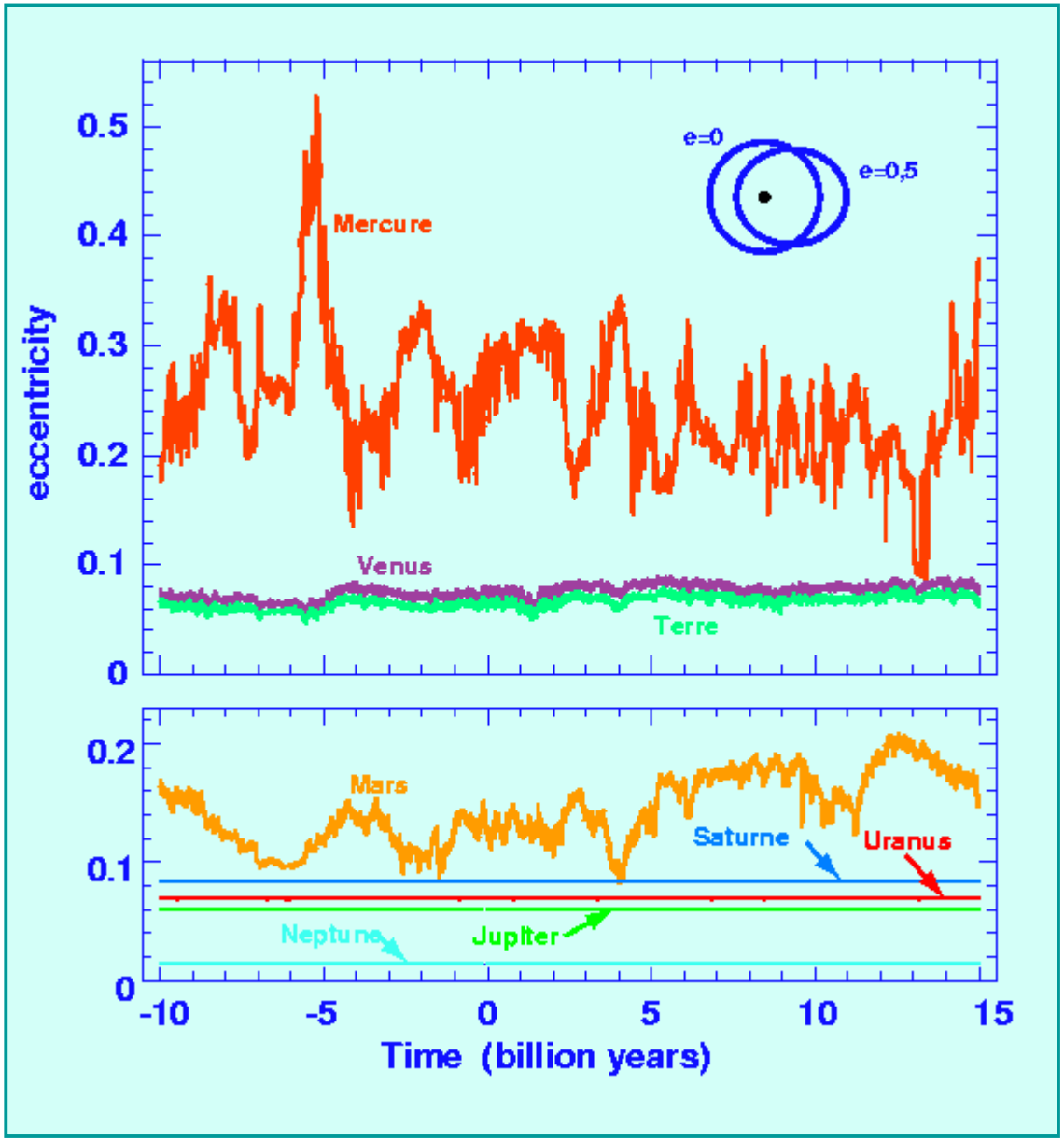



-0.2Ga bis 0.2Ga

- Der Wechsel von Libration zu Rotation spricht für Chaos.
- Die Lyapunovzeit ist $\lambda$=5Ma.

# Langzeitbeispiel aller Planeten

- Es gibt Anfangsbedingungen für die Merkur in Ga Zeiten die Venusbahn kreuzt.
- Erde, Mars und Venus sind antikorreliert zu Merkur, vermutlich wegen Erhaltung des Drehimpulses.
- → Bedingte Stabilität für Ga Zeiten.



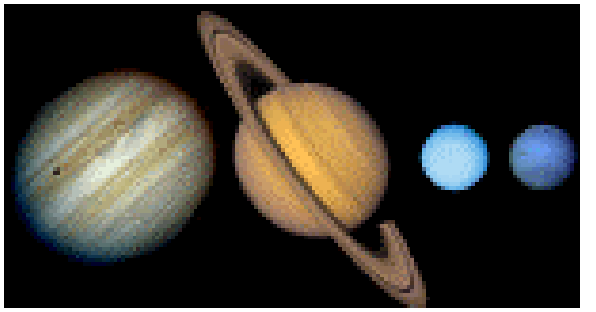
# Choas um Resonanzen zwischen äußeren Planeten

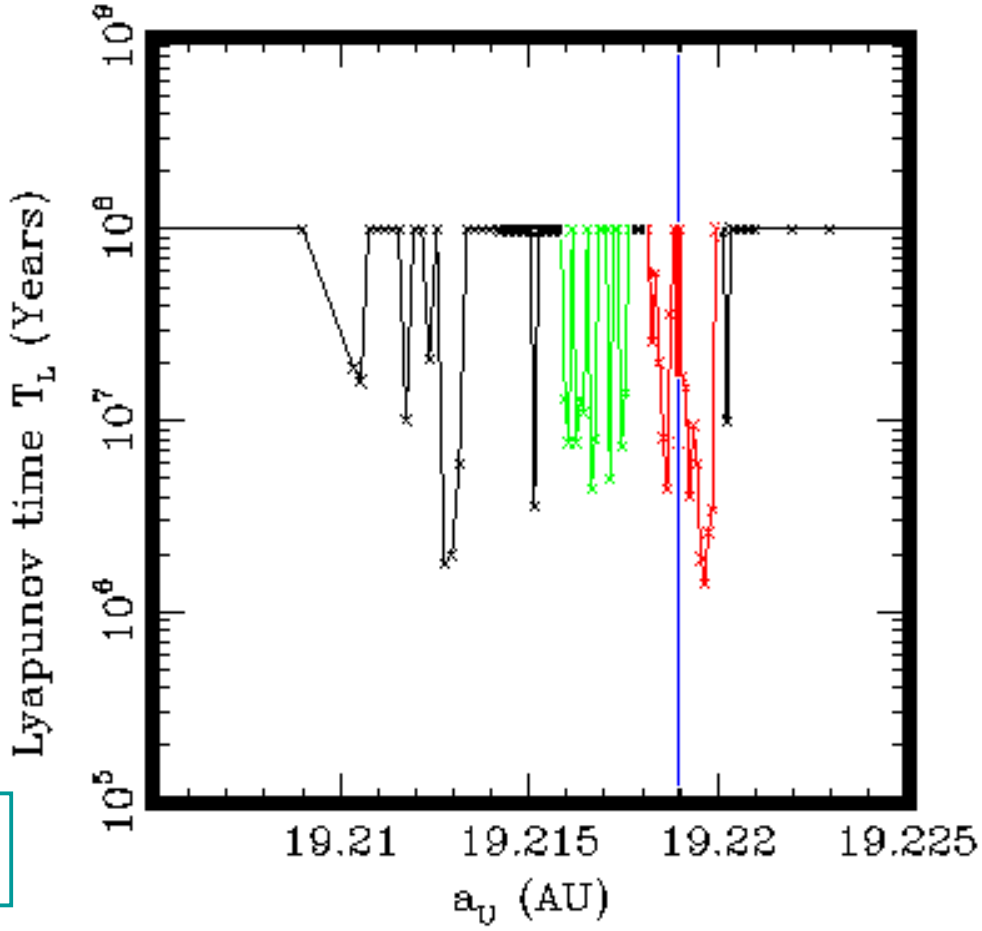
- In der Nähe von Uranus überlappen sich einige Drei-Teilchen-Resonanzen (nach Chirikov):

$$3\lambda_J - 5\lambda_S - 7\lambda_U + ng_J + 7mg_S + (3-n)mg_U = 0$$

$$3\lambda_J - 5\lambda_S - 7\lambda_U + ng_J + 7mg_S + (2-n)mg_U = 0$$

- Die Lyapunovzeit ist $\lambda$=7Ma.





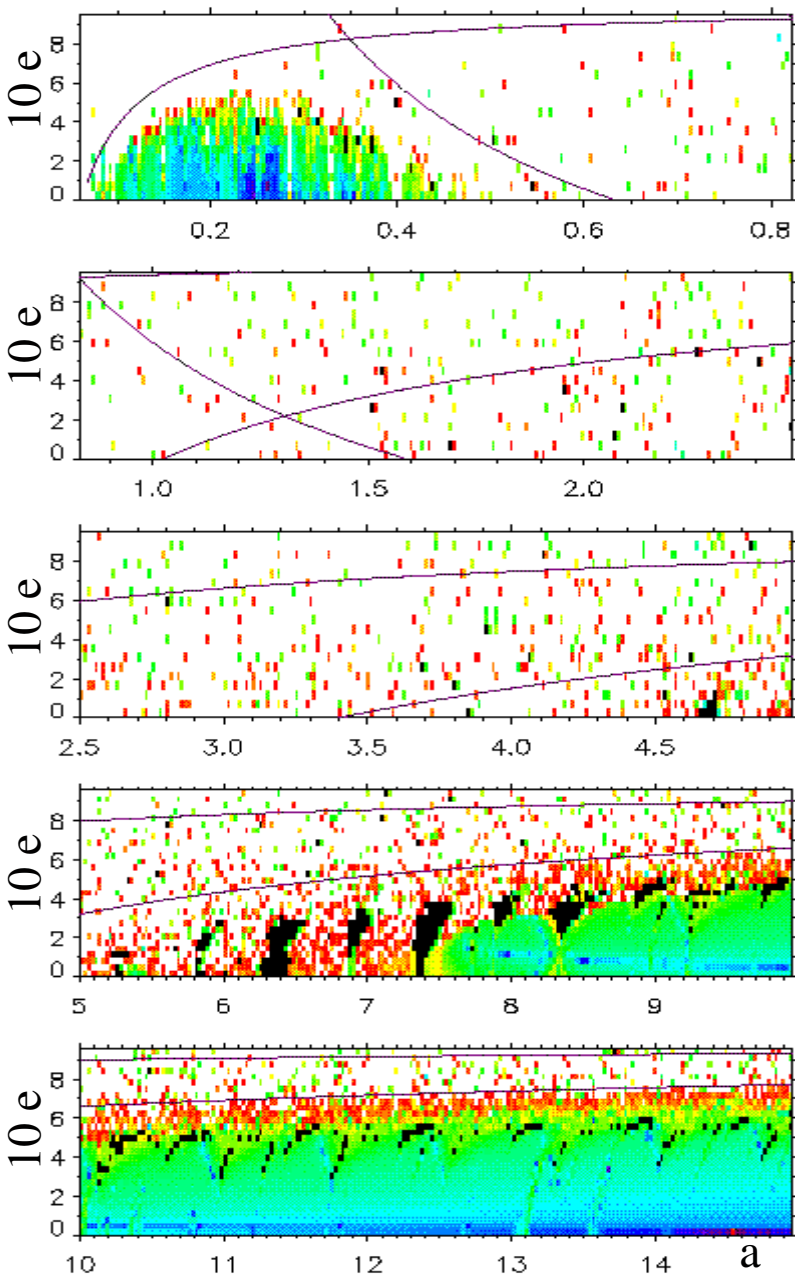
# Planetensysteme anderer Sterne

## $\upsilon$-Andromedae Planetensystem

- Entdeckung: 1999
- M=1.3$M_S$
- Drei Planeten a/A.U.=(0.06,0.8,2.5)
- Neigung und Masse können nicht beide ermittelt werden da Blickwinkel unbekannt.

→ Untere Grenze für Massen

- 1. Datensatz: instabile Bewegung
- 2. Datensatz: stabil für Ma Zeiten



# Zusammenfassung

- Chaos im Sonnensystem läßt sich nachweisen durch Rotation/Libration um Resonanzen, unstetige Frequenzabbildungen, einen Drift der Frequenzen, Lyapunov Zeiten, Resonanzüberlapp Kriterium.
- Chaotische Hyerion Drehung ist messbar.
- Alle Objekte haben in Ihrer Entwicklung chaotische Bewegung erlebt.
- Chaos scheint in Ga nicht zu Instabilität zu führen.